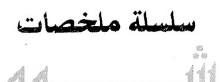
الطبعة الرابعة

سلسلة ملخصات



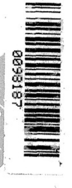
نظريات ومسائل في

تحليل المتجهات

ومقدمة لتحليل الكميات الممتدة

موراي ر. شبيجل

● يحتوى الكتاب على 480 مسألة محلولة حلاً تفصيلياً



سلسلة شوم
أكثر من 2.5 مليون نسخة
العالم

الدار الدولية للنشر والتوزيع
القاهرة / مصر

ملخصات شوم

نظريات ومسائل

في

تحليل المتجهات

ومقدمة لتحليل الكميات الممتدة

تأليف

الدكتور موراى ر. شبيجل

أستاذ الرياضيات

معهد رنسلير للفنون التطبيقية المتعددة

ترجمة

الدكتورة سميرة عبد الحفيظ رستم

كلية التكنولوجيا

جامعة حلوان

جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور عبد الرازق عبد الفتاح

رئيس جامعة حلوان

جمهورية مصر العربية



الدار الدولية للنشر والتوزيع

حقوق النشر

الـــدار الدوليـــة للنشـــر والتـــوزيع

٨ ش إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - القاهرة

ص.ب : ٥٥٩٩ هليوبوليـس غـرب - القاهـرة

تليفـــــون : ٢٩٩٠٩٧٠

تلكس : ٢٠٨١٥ PESC UN

فاكـــس : ٢٩٩٠٩٧٠/ ٢٠٢٠٠

07 094455 5

مقدمـــة الناشـــــر

المعرفة هى أصل الحضارة ،
والكلمة هى أصل المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هى أهم مكون فى هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضارتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ، ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارىء العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية لهو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الإتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير إحتياجات القارىء العربى أستاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا فى إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى للقارىء العربى .

والله ولى التوفيق ،،،

محمد وفائى كامل
مدير عام
الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة

تحليل المتجهات ، التى بدأت فى منتصف القرن التاسع عشر ، أصبحت فى السنوات الحديثة جزءاً أساسياً لخلفيات الرياضيات المطلوبة للمهندسين ، والمشتغلين بالعلوم والفيزياء والرياضيات . هذه الاحتياجات بعيدة عن أن تكون عارضة ، ليس فقط لما تمده تحليل المتجهات من العرض الرمزى المختصر للمعادلات الناتجة من الصياغة الرياضية للمشاكل الفيزيائية والهندسية ولكنها أيضاً مساعدة طبيعية فى تكوين الصور الذهنية للأفكار الفيزيائية والهندسية . باختصار قديكون حسناً جداً اعتبارها من أقدر اللغات وطرق التفكير فى العلوم الطبيعية إيضاحاً .

صمم هذا الكتاب ليستعمل إما كمرجع لمنهج مقرر فى تحليل المتجهات أو مكمل مفيد جداً لكل المراجع الجارية القياسية . ويكون أيضاً ذا قيمة اعتبارية للذين يدرسون منهج فى الفيزياء ، الميكانيكا ، نظرية الكهرومغناطيسية ، ديناميكا الهواء ، أو فى أى من المجالات الأخرى المتعددة التى تستخدم فيها طرق المتجهات .

يبدأ كل باب بعرض واضح للتعريفات المتصلة بالموضوع ، أساسيات ونظريات موضحة بأمثلة ومواد وصف أخرى . ويتبع هذا مجموعة متدرجة من المسائل المتنوعة المحلولة . المسائل المحلولة تساعد على توضيح وإسهاب فى النظرية ، وتركز على النقط الدقيقة جداً التى بدونها لايستطيع الطالب أن يشعر أن لديه خلفية متينة وتقدم التكرار للمبادىء الاساسية الحيوية للتدريس الفعال . كما تحتوى المسائل المحلولة اثباتات كثيرة للنظريات واشتقاق القوانين . والعدد الكثير للمسائل المتنوعة مع اجابتها تعطى مراجعة كاملة لمادة كل باب .

المواضيع التى غطت تحتوى على الجبر والتفاضل وحساب التكامل للمتجهات ، نظرية ستوكس ، نظرية التباعد ونظريات التكامل الأخرى معاً فى تطبيقات لكل المجالات المختلفة . ملامح أخرى هى الأبواب على إحداثيات منحنى الأضلاع وتحليل الكميات الممتدة التى ثبتت فائدتها العظمى فى الدراسات العليا الهندسية والفيزيائية والرياضية .

وقد احتوى الكتاب على مادة أكثر من تلك التى يمكن أن تغطيها المقررات الأولى . وذلك ليكون هذا الكتاب أكثر مرونة وليعطى مرجعاً أكثر إفادة . ويكون حافزاً للمهتمين بهذه المواضيع .

يعترف المؤلف بالمعروف والدين للسيد هايدن لوضع وطبع الصور والعمل الفنى لرسم الأشكال . واقعية هذه الأشكال أضافت كثير من التوضيح الفعال حيث تصور المجسمات يلعب دوراً هاماً فى الموضوع .

معهد رنسلير للفنون التطبيقية

يونية ١٩٥٩

م. ر. شبيجل

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساساً للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذى تخلفت عنه زمناً طويلا .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية فى مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة فى جامعاتنا العربية ما زالت فى أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية فى تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير فى إعداد الأجيال التى نريد لها أن تبنى صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGrawhill Book Company نشاطها بالشروع فى إصـــدار الطبعة العربية من سلسلة سشوم Schaum Series التى لقيت فى طبعتها الأصلية نجاحاً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكمن وراء سلسلة ملخصات سشوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب سشوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب المطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

المحتويات



الفصل الأول

المتجهات والعدديات

المتجه : هو كيه لها مقدار واتجاه مثل الازاحة والسرعة والقوة والعجلة .

يمثل المتجه بيانيا بسهم OP (شكل ١ – ١) يحدد الاتجاه وطول هذا السهم يعين مقدار المتجه . نهاية ذيل السهم O تسمى نقطة البداية للمتجه أو نقطة الأصل ، ويسمى الرأس P بنقطة النهاية أو النهاية .

يعبر عن المتجه تحليليا بحرف فوقه سهم مثل $\vec{A}$ كما فى شكل ١ – ١ ومقدار هذا المتجه يرمز له بالرمز $|\vec{A}|$ أو A فى المطبوعات يستخدم البنط الظاهر مثل **A** لتمثل المتجه $\vec{A}$ فى حين $|\mathbf{A}|$ أو A تمثل المقدار وسوف يستعمل فى هذا الكتاب البنط الظاهر المتجه **OP** يمكن كتابته أيضا كالآتى $\overrightarrow{OP}$ أو **OP** فى هذه الحالة يحدد مقدار هذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{OP}$ ، $|\overrightarrow{OP}|$ أو $|\mathbf{OP}|$.

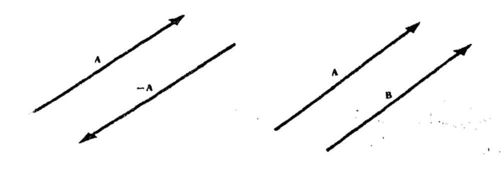
شكل ١ – ١

الكمية العددية هى كية لها مقدار وليس لها اتجاه مثل الكتلة ، الطول ، الزمن ، درجة الحرارة ، أو أى عدد حقيقى ويرمز عادة للكيات العددية بالحروف العادية كما هو مستعمل فى مبادئ الجبر . العمليات الرياضية للكيات العددية تتبع نفس قوانين مبادئ الجبر .

المتجهات الجبرية : عمليات الجمع والطرح والضرب مألوفة فى الأعداد الجبرية أوالعددية – بالتعاريف الملائمة ، وهذه التعاريف يمكن التوسع فيها لتمثل المتجهات الجبرية . التعاريف الآتية أساسية :

١ – المتجهان **A** و **B** يتساويان إذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بغض النظر عن موضع نقطة البداية ، وبذلك يكون $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ كما بشكل ١ – ٢ .

٢ – المتجه الذى له اتجاه عكس المتجه **A** وله نفس المقدار يرمز له بالرمز $-\mathbf{A}$ كما بشكل ١ – ٣ .

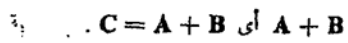


شكل ١ — ٣ شكل ١ — ٢



٣ – مجموع أو محصلة متجهين A و B هى المتجه C المتكون بوضع نقطة البداية للمتجه B على نقطة النهاية للمتجه A ثم توصل نقطة البداية المتجه A بنقطة النهاية للمتجه B شكل ١ – ٤ وهذا المجموع يكتب كالآتى :

$C = A + B$ أى $A + B$.



هذا التعريف يكافئ قانون متوازى الأضلاع لجمع المتجهات (أنظر المسألة رقم ٣) .

شكل ١ — ٤

استكمالا لجمع أكثر من متجهين ، اتبع نفس الطريقة (أنظر مسألة رقم ٤) .

٤ – الفرق بين المتجهين A ، B يعبر عنه بالرمز $A - B$ وهو عبارة عن المتجه C مضافا إليه المتجه B لينتج المتجه A . والمتجه $A - B$ يكافئ جمع $A + (-B)$.

إذا كان $A = B$ حينئذ $A - B$ يساوى صفراً ويعرف بالمتجه الصفرى ويرمز له بالرمز 0 أو 0. ببساطة ، أى أن مقداره يساوى صفراً وليس له اتجاه محدد – أما المتجه غير الصفرى فهو متجهه حقيقى . كل المتجهات تعتبر متجهات حقيقية إلا إذا ذكر غير ذلك .

٥ – ضرب المتجه A بكية عددية m هو متجه mA الذى قيمته $|m|$ مضروبا فى مقدار A وله نفس الأتجاه مثل المتجه A أو عكسه تبعا لقيمة m موجبة كانت أو سالبة . إذا كانت $m = 0$ يصبح المتجه mA متجها صفريا .

قوانين المتجهات الجبرية : إذا كان كل من C و A و B متجهات وأن m ، n عدديات فإن

١ – قانون التبديل للجمع . $A + B = B + A$

٢ – قانون الترافق للجمع . $A + (B+C) = (A+B) + C$

٣ – قانون التبديل للضرب . $mA = Am$

٤ – قانون الترافق للضرب . $m(nA) = (mn)A$

٥ – قانون توزيع الحدود . $(m+n)A = mA + nA$

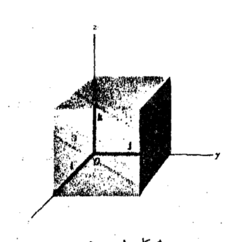
٦ – قانون توزيع الحدود . $m(A+B) = mA + mB$

ومن الملاحظ أن فى هذه القوانين استخدم فقط ضرب الكية المتجه بكية عددية أو أكثر . فى الفصل الثانى سوف يعرف ضرب المتجهات .

هذه القوانين تمكننا من معاملة المعادلات الاتجاهية بنفس الطريقة التى تعامل بها المعادلات الجبرية العادية على سبيل المثال إذا كان $A + B = C$ بالتالى فإن $A = C - B$.

وحدة المتجهة : هو المتجه ذو وحدة المقدار – فإذا كان A عبارة عن متجه له مقدار $A \neq 0$ فإن A/A هى وحدة المتجه الذى له نفس الاتجاه مثل A .

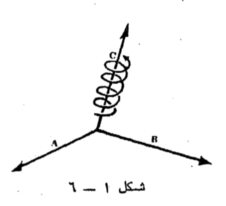
أى متجه A يمكن تمثيله بوحدة المتجه a فى نفس اتجاه A مضروبا بمقدار المتجه A . بالرمز $A = Aa$.



شكل ١ — ٥

وحدة المتجهات العمودية : k و j و i مجموعة من وحدة المتجهات تلك التى لها الاحداثيات الموجبة الثلاثة المتعامدة x, y, z والتى يرمز لها بالرموز i, j, k على الترتيب شكل ١ – ٥ .

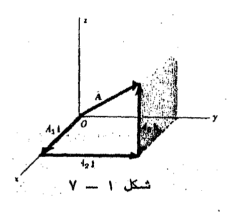
سوف نستعمل اتجاه عقرب الساعة إلا إذا ذكر عكس ذلك . اشتق اسم هذه الطريقة من حقيقة أن دوران أسنان القلاووظ فى الاتجاه الأيمن خلال ٩٠° من Ox إلى Oy سوف يقدم الازاحة فى الاتجاه الموجب z كما فى شكل ١ – ٥ .



شكل ١ — ٦

وعموما فإن ثلاثة متجهات A, B, C لها نقطة بداية مشتركة وليس لها مستوى واحدا أى أنهم لا يقعوا على أو يوازوا نفس المستوى ، يقال أنهم يكونوا النظام اليمينى إذا كان دوران أسنان القلاووظ فى الاتجاه الأيمن خلال زاوية أقل من ١٨٠° من المتجه A إلى المتجهه B يسبب تقدم الازاحة فى الاتجاه C كما بشكل ١ – ٦ .

مركبات المتجهة : أى متجه A فى ثلاثة أبعاد يمكن أن يعبر عنه بنقطة بداية عند نقطة الأصل O للاحداثيات المتعامدة (شكل ١ – ٧) . وليكن (A_1, A_2, A_3) الاحداثيات المتعامدة لنقطة النهاية للمتجه A الذى له نقطة البداية عند O . المتجهات A_1i, A_2j, A_3k تسمى المركبات العمودية للمتجه أو ببساطة مركبات المتجهات A فى الاتجاهات x, y, z على الترتيب. A_1, A_2, A_3 تسمى المركبات العمودية أو ببساطة مركبات المتجه A فى اتجاه x, y, z على الترتيب .



شكل ١ — ٧

مجموع أو محصلة $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ ، $A_3\mathbf{k}$ هو المتجه $\mathbf{A}$ وعلى ذلك يمكن أن نكتب

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

مقدار المتجه $\mathbf{A}$ يكون

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

على وجه الخصوص المتجه الموضعي أو المتجه نصف القطرى $\mathbf{r}$ من نقطة O إلى نقطة (x, y, z) تكتب .

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

وله المقدار $$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (٤)$$

المجال العددى :

إذا ناظرت كل نقطة (x, y, z) فى منطقة فراغ R مقداراً أو كية عددية $\phi(x, y, z)$ حينئذ ϕ تسمى الدالة العددية الموضعية أو دالة النقطة العددية وبالتالى يمكن القول أن المجال العددى ϕ قد عرف فى المنطقة R .

امثلة ١ : درجة الحرارة عند أى نقطة فى أو على سطح الكرة الأرضية فى وقت معين تعرف المجال العددى أو غير المتجه .

٢ – $\phi(x,y,z) = x^3y - z^2$ تحدد المجال العددى

المجال العددى الذى لا يعتمد على الزمن يسمى المجال العدى لحالة الاستقرار .

مجال المتجهة :

إذا ناظرت كل نقطة (x, y, z) فى منطقة فراغ R كية متجهة $\mathbf{V}(x, y, z)$ حينئذ تسمى $\mathbf{V}$ الدالة المتجهة الموضعية أو نقطة الدالة المتجه – وبالتالى يمكن القول أنه يوجد مجال متجه $\mathbf{V}$ معرف فى المنطقة R .

امثلة : ١ – إذا كانت السرعة عند أى نقطة (x, y, z) فى مائع متحرك معروفة عند زمن معين حينئذ يكون مجال المتجه قد عرف .

٢ – $\mathbf{V}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ يعرف مجال المتجه

مجال المتجه الذى لا يعتمد على الزمن يسمى مجال متجه مستقر .

مسائل محلولة

١ – أذكر أيا من الكيات الآتية متجه وأى منها عددى :

(ا) الوزن (ب) السعر الحرارى (جـ) الحرارة النوعية

(د) العزم (هـ) الكثافة (و) الطاقة

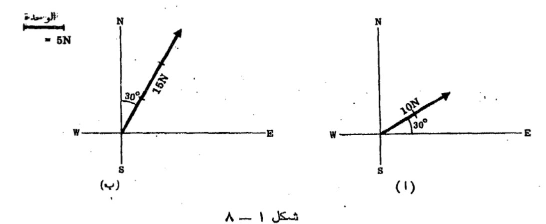
(ل) الحجم (م) المسافة (ن) السرعة (ى) شدة المجال المغنطيسى

الحل : (ا) متجه (ب) عددى (جـ) عددى (د) متجه (هـ) عددى (و) عددى

(ل) عددى (م) عددى (ن) عددى (ى) متجه

٢ – مثل بيانيا : (ا) قوة مقدارها 10 N فى اتجاه 30° شمال الشرق .

(ب) قوة مقدارها 15 N فى اتجاه 30° شرق الشمال .

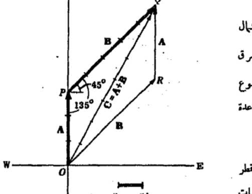


شكل ١ — ٨

اختر مقدار الوحدة . المتجهات المطلوبة كما هو مبين بشكل ١ — ٨

٣ – تتحرك سيارة 3 km فى اتجاه الشمال ثم 5 km فى اتجاه شمال الشرق مثل هذه الازاحة بيانيا ثم أوجد محصلة الازاحة :

(ا) بيانيا (ب) حسابيا



شكل ١ — ٩

المتجه OP أو A يمثل مسار 3 km فى اتجاه الشمال

المتجه PQ أو B يمثل مسار 5 km فى اتجاه شمال الشرق

المتجه OQ أو C يمثل محصلة الازاحة أو محصلة مجموع المتجهين B و A أى أن $C = A + B$ هذه هى قاعدة المثلث لجمع المتجهات .

يمكن أيضا الحصول على محصلة المتجه OQ بتكوين قطر متوازى الأضلاع *OPQR* شكل (١ — ٩) الذى فيه المتجهات $OP = A$ و OR (يساوى المتجه PQ أو B) كجوانب . هذه هى قاعدة متوازى الأضلاع لجمع المتجهات .

(ا) إيجاد المحصلة بيانيا . وقع 1 km على المتجه OQ لإيجاد قيمة 7.4 km (تقريبا) الزاوية $EOQ = 16.5°$ باستخدام المنقلة . حينئذ المتجه OQ له القيمة 7.4 km واتجاه 61.5° شمال الشرق .

(ب) إيجاد قيمة المحصلة حسابيا . من المثلث OPQ حدد قيمة مقدار المتجهات A, B, C بواسطة A, B, C ، ولدينا باستخدام قانون جيوب التمام .

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135° = 34 + 15\sqrt{2} = 55.21$$

وتقريبا $C = 7.43$

باستخدام قانون الجيوب
$$\frac{A}{\sin\angle OQP} = \frac{C}{\sin\angle OPQ}$$

حينئذ

$$\sin\angle OQP = \frac{A\sin\angle OPQ}{C} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \quad , \quad \angle OQP = 16°35'$$

إذن المتجه OQ له القيمة 7.43km والاتجاه $(45° + 16°35') = 61°35'$ شمال الشرق

٤ - أوجد مجموع أو محصلة الازاحات الآتية :

المتجه A قيمته 10 m شمال الغرب ، المتجه B قيمته 20 m وإتجاهه 30° شمال الشرق - المتجه C قيمته 35 m جنوبا شكل (١ - ١٠ ، ا) .

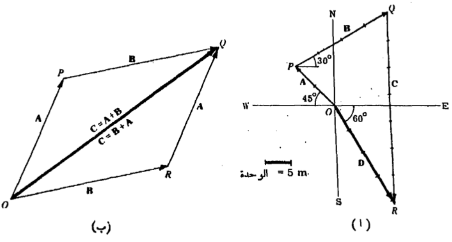
عند نقطة نهاية المتجه A ضع نقطة البداية المتجه B .

عند نقطة النهاية المتجه B ضع نقطة البداية للمتجه C .

تتكون المحصلة D بوصل نقطة البداية للمتجه A بنقطة النهاية المتجه C أى أن $D = A + B + C$

بيانيا بالقياس فإن المحصلة تساوى 4.1 units تساوى 20.5m ولها الاتجاه 60° جنوب الشرق .

لمعرفة الطريقة الحسابية لجمع ثلاثة متجهات أو أكثر سواء كانوا فى مستوى واحد أو فى الفراغ أنظر مسألة ٢٦ .



شكل ١ — ١٠

٥ – بين أن مجموع المتجهات يخضع لقانون التبديل مثلا $A + B = B + A$ شكل (١ – ١٠ . ب)

$OP + PQ = OQ$ أو $A + B = C$

و $OR + RQ = OQ$ أو $B + A = C$

إذن $A + B = B + A$

٦ – بين أن مجموع المتجهات يخضع لقانون الترافق مثلا $A + (B + C) = (A + B) + C$

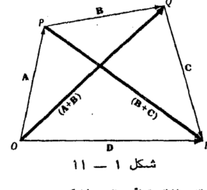
$OP + PQ = OQ = (A + B)$

و $PQ + QR = PR = (B + C)$

$OP + PR = OR = D$ أى أن $A + (B + C) = D$

$OQ + QR = OR = D$ أى أن $(A + B) + C = D$

إذن $A + (B + C) = (A + B) + C$



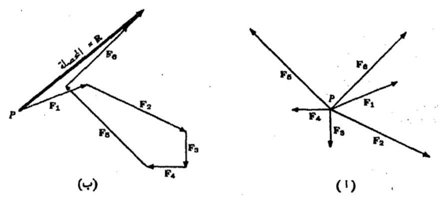
شكل ١ — ١١

استكمالا لنتائج المسائل ٥ – ٦ بين أن ترتيب الجمع لأى عدد من المتجهات غير جوهرى .

٧ – القوى $F_1, F_2, \ldots, F_6$ تؤثر كما هو مبين على الجسم P . ما هى القوة المطلوبة لتمنع P من الحركة .

حيث أن ترتيب المتجهات فى عملية الجمع غير موضوعية إذن يمكن أن نبدأ بأى متجه وليكن F_1 . اجمع على F_1 المتجه F_2 ثم F_3 . . . الخ المتجه المرسوم من نقطة البداية للمتجه F_1 إلى نقطة النهاية للمتجه F_6 هو المحصلة R أى أن $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$

القوة المطلوبة لتمنع P من الحركة هو $-R$ – هذا المتجه قيمته تساوى المتجه R ، ولكن عكس الاتجاه وفى بعض الأحيان يسمى الموازن .



شكل ١ — ١٢

٨ – أعطيت المتجهات A, B, C شكل أ (١ – ١٢) كون :

(أ) $A - B + 2C$ (ب) $3C - \frac{1}{2}(2A - B)$

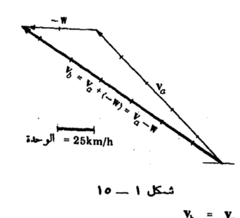
(أ) (ب)

شكل ١ — ١٣

(أ) (ب)

شكل ١ — ١٤

٩ – طائرة تتحرك فى اتجاه الشمال الغربى بسرعة 125 km/h بالنسبة للأرض نتيجة لوجود ريح غربية بسرعة 50 km/h بالنسبة للأرض أوجد السرعة والاتجاه التى تتحرك بها الطائرة إذا لم توجد ريح مؤثرة ؟



شكل ١ — ١٥

ليكن W = سرعة الريح

V_a = سرعة الطائرة فى وجود الريح

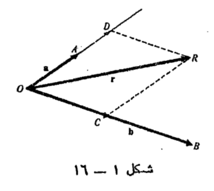
V_b = سرعة الطائرة بدون ريح مؤثرة .

$V_a = V_b + W$ أو $V_b = V_a - W = V_a + (-W)$

V_b لها مقدار 6.5 units = 163km/h واتجاه 33° شمال الغرب .

١٠ — معطى متجهين غير متوازين . b و a أوجد تعبير لأى متجه r يقع فى المستوى المحدد بالمتجهات b و a .

المتجهات غير المتوازية هى المتجهات التى لا تتوازى مع نفس الخط وبالتالى عندما تنطبق نقطة البداية لهما يحددان مستوى . ليكن المتجه r هو أى متجه واقع فى المستوى المحتوى على b و a وتكون نقطة البداية له تنطبق على نقطة البداية للمتجهين b و a عند النقطة O . من نقطة النهاية R للمتجه r كون خطوطا توازى المتجهين b و a ونكل متوازى الأضلاع $ODRC$ شكل ١ — ١٦ بامداد خطوط التأثير لكل من المتجهين b و a إذا لزم الأمر من الشكل المتكون .



شكل ١ — ١٦

حيث x كية عددية $\mathbf{OD} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}$

حيث y كية عددية $\mathbf{OC} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}$

وباستخدام قانون متوازى الأضلاع لجمع المتجهات

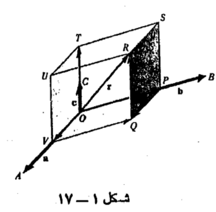
$$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \quad \text{أو} \quad \mathbf{OR} = \mathbf{OD} + \mathbf{OC}$$

وهو التعبير المطلوب . المتجهات $y\mathbf{b}$ و $x\mathbf{a}$ تسمى مكونات المتجه r فى اتجاه b و a على الترتيب . الكميات العددية y و x يمكن أن تكون موجبة أو سالبة ويتوقف ذلك على الاتجاه النسبى للمتجهات . من طريقة التكوين واضح أن y و x لهما قيمة واحدة لكل من r و b و a . المتجهات b و a تسمى متجهات الأساس فى المستوى .

١١ — معطى ثلاثة متجهات c و b و a تقع فى مستويات غير متوازية . أوجد تعبيراً لاى متجه r فى الأبعاد الثلاثة .

حيث أن هذه المتجهات تقع فى مستويات غير متوازية وبالتالى عندما تنطبق نقطة البداية فإن المتجهات لاتقع فى نفس المستوى .

ليكن r أى متجه فى الفراغ نقطة البداية له منطبقة مع نقطة البداية لكل من المتجهات c و b و a خلال نقطة النهاية للمتجه r مرر مستويات توازى على الترتيب المستويات المحتوية على كل من المتجهات b و c ، a و c ، b و a ثم كون متوازى السطوح $PQRSTUV$ شكل ١ - ١٧ بامداد خطوط العمل للمتجهات c و b و a إذا كان ضروريا . من الشكل المجاور .



شكل ١ — ١٧

حيث x مقدار عددى $\mathbf{OV} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}$

حيث y مقدار عددى $\mathbf{OP} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}$

حيث z مقدار عددى $\mathbf{OT} = z(\mathbf{OC}) = z\mathbf{c}$

ولكن $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ أو $\mathbf{OR} = \mathbf{OV} + \mathbf{VQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OV} + \mathbf{OP} + \mathbf{OT}$

من طريقة انشاء الشكل يتضح أن z و y و x تكون وحيدة (فريدة) لكل من المتجهات المعطاة $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و $\mathbf{r}$

المتجهات $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ تسمى مركبات المتجه $\mathbf{r}$ فى اتجاه $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ على الترتيب . المتجهات $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ تسمى المتجهات الأساسية فى الثلاثة أبعاد .

كحالة خاصة إذا كانت المتجهات $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ هى وحدة المتجهات $\mathbf{k}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}$ والتى هى متعامدة على بعضها البعض يمكن أن نرى أن أى متجه $\mathbf{r}$ يمكن تمثيله بدلالة $\mathbf{k}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}$ بالتعبير $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

أيضا إذا كانت $\mathbf{c} = 0$ حينئذ فإن المتجه $\mathbf{r}$ لابد أن يقع فى المستوى المحتوى على المتجهين $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ وبالتالى فإن نتيجة المسألة ١٠ يمكن الحصول عليها .

١٢ - أثبت أنه إذا كان المتجهان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ غير متوازيين فإن $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = 0$ يتضمن $x = y = 0$.

افترض $x \neq 0$ إذن $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = 0$ يتضمن $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ أو $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$ أى أن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لابد أن يوازيا نفس الخط وهذا عكس الفرض . إذن $x = 0$ وحينئذ $y\mathbf{b} = 0$ ومنها يكون $y = 0$.

١٣ - إذا كان $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ حيث $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متجهين غير متوازيين ، إذن $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$
يمكن أن تكتب $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$

$$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = 0 \quad \text{أو} \quad (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = 0$$

حينئذ من المسألة ١٢ $x_1 - x_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0$ أو $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

١٤ - أثبت إذا كانت $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ غير متوازية فإن $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = 0$ تتضمن $x = y = z = 0$.

افترض $x \neq 0$ حينئذ $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = 0$ تتضمن $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b} - z\mathbf{c}$ أو $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$
ولكن $-(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$ متجه يقع على مستوى $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ (مسألة ١٠) أى $\mathbf{a}$ تقع فى المستوى $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ وهذا واضح أنه عكس المعطيات أى أن $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ هى متجهات لا توازى نفس المستوى إذن $x = 0$ بنفس الأسباب يمكن إثبات التناقض بفرض أن $y \neq 0$ و $z \neq 0$

١٥ - إذا كان $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} + z_1\mathbf{c} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b} + z_2\mathbf{c}$ حيث $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ غير واقعة فى نفس المستوى إذن

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$$

يمكن أن تكتب المعادلة $(x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} + (z_1 - z_2)\mathbf{c} = 0$

حينئذ من المسألة (١٤) $x_1 - x_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0,\ z_1 - z_2 = 0$ أو $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$

١٦ – برهن أن أقطار متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

ليكن $ABCD$ هو متوازى أضلاع وليكن نقطة تقاطع الأقطار هى P

حيث أن

بما أن $\mathbf{BD}+\mathbf{a}=\mathbf{b},\ \mathbf{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$ إذن $\mathbf{BP}=x(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

بما أن $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{AP}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$

لكن $\mathbf{AB}=\mathbf{AP}+\mathbf{PB}=\mathbf{AP}-\mathbf{BP},$

أى أن $\mathbf{a}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b})-x(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(x+y)\mathbf{a}+(y-x)\mathbf{b}$

حيث $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ غير متوازية لدينا من المسألة ١٣

$x+y=1$ و $y-x=0,\ \text{i.e. } x=y=\frac{1}{2}$

و P نقطة منتصف كلا القطرين

شكل ١ — ١٨

١٧ – إذا وصلت نقطة منتصف الأضلاع المتجاورة لأى شكل رباعى بخطوط مستقيمة فأثبت أن الشكل الرباعى الناتج هو متوازى أضلاع .

ليكن الشكل الرباعى المعطى $ABCD$ ونقط منتصف الأضلاع هى P, Q, R, S أنظر شكل (أ) (١ – ١٩) .

حينئذ $\mathbf{PQ}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\quad \mathbf{QR}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),\quad \mathbf{RS}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}),\quad \mathbf{SP}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})$

لكن $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$ حينئذ

$$\mathbf{QR}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})=\mathbf{PS}\quad ,\quad \mathbf{PQ}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{SR}$$

وعلى ذلك تكون الجوانب المتقابلة متساوية ومتوازية ويكون $PQRS$ متوازى أضلاع .

١٨ – إذا كانت P_1, P_2, P_3 هى نقطة ثابتة بالنسبة إلى نقطة الأصل O ولتكن $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3$ هى المتجهات الموضعية من O إلى كل نقطة أثبت أنه إذا كانت المعادلة المتجه صحيحة بالنسبة إلى نقطة الأصل O فإنها تكون أيضا صحيحة بالنسبة لأى نقطة أصل أخرى ولتكن O' إذا وإذا فقط كأن $a_1+a_2+a_3=0$

ليكن $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3$ هى المتجهات الموضعية للنقط P_1, P_2, P_3 بالنسبة إلى O' وأيضا بفرض أن $\mathbf{v}$ هو المتجه الموضعى من O' بالنسبة إلى O نبحث عن الشروط التى عندها تكون المعادلة $a_1\mathbf{r}'_1+a_2\mathbf{r}'_2+a_3\mathbf{r}'_3=0$ صحيحة للمرجع الجديد المجموعة

من شكل (ب) (١ – ٩) واضح أن $\mathbf{r}_1=\mathbf{v}+\mathbf{r}'_1,\ \mathbf{r}_2=\mathbf{v}+\mathbf{r}'_2,\ \mathbf{r}_3=\mathbf{v}+\mathbf{r}'_3$ لذلك $a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3=0$

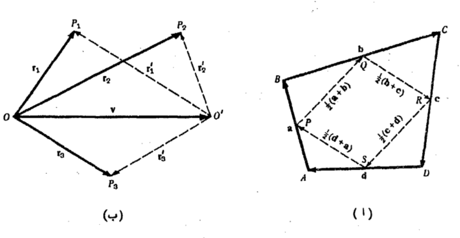
تصبح

$$\begin{aligned}a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3 &= a_1(\mathbf{v}+\mathbf{r}'_1)+a_2(\mathbf{v}+\mathbf{r}'_2)+a_3(\mathbf{v}+\mathbf{r}'_3)\\ &=(a_1+a_2+a_3)\mathbf{v}+a_1\mathbf{r}'_1+a_2\mathbf{r}'_2+a_3\mathbf{r}'_3=0\end{aligned}$$

النتيجة $a_1\mathbf{r}'_1 + a_2\mathbf{r}'_2 + a_3\mathbf{r}'_3 = \mathbf{0}$ تكون صحيحة فقط إذاً

$(a_1 + a_2 + a_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ أى أن $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

يمكن تعميم هذه النتيجة



شكل ١ — ١٩

١٩ - أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطتين معلومتين A و B وله متجهان موضعيان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بالنسبة لنقطة الأصل O .

إذا فرضنا أن $\mathbf{r}$ هو المتجه الموضعى لأى نقطة P على الخط المار بكل من B و A

من شكل ١ - ٢٠

$\mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \mathbf{OP}$ أو $\mathbf{a} + \mathbf{AP} = \mathbf{r}$ أى أن $\mathbf{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$

$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$ أو $\mathbf{a} + \mathbf{AB} = \mathbf{b}$ أى أن $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

حيث $\mathbf{AP}$ و $\mathbf{AB}$ خط مستقيم واحد

$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ أو $\mathbf{AP} = t\mathbf{AB}$ حينئذ المعادلة المطلوبة هى

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ أو $\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

شكل ١ — ٢٠

إذا كتبت المعادلة على الصورة $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} - \mathbf{r} = \mathbf{0}$ فيكون مجموع المعاملات المتجهات $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}$ هو $1 - t + t - 1 = 0$ ومن مسألة ١٨ يظهر أن النقطة P تكون دائما على الخط الواصل بين B و A ولا يعتمد على اختيار الأصل O وهذا هو المتوقع

طريقة أخرى . بما أن **AP** و **PB** يقعان على خط مستقيم واحد وأن n و m كميات عددية

$$m\mathbf{AP} = n\mathbf{PB} \quad \text{أو} \quad m(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = n(\mathbf{b}-\mathbf{r})$$

وبالحل نجد $\mathbf{r} = \dfrac{m\mathbf{a} + n\mathbf{b}}{m+n}$ والتي تسمى الصورة المتماثلة

٢٠ – (أ) أوجد المتجهات الموضعية $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_1$ للنقط $P(2,4,3)$ و $Q(1,-5,2)$ للاحداثيات المتعامدة بدلالة وحدة المتجهات **i, j, k**

(ب) عين بالرسم وبالتحليل محصلة هذا المتجهات الموضعية .

شكل ١ — ٢١

(أ)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BP} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{OQ} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EQ} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

(ب) بالرسم . محصلة $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_1$ هى القطر **OR** لمتوازى المستطيلات $OPRQ$ تحليليا محصلة $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ يمكن الحصول عليها .

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}) + (\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

٢١ – برهن أن مقدار A للمتجه **A** $A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ يكون $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

من نظرية فيثاغورث

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

حيث $\overline{OP}$ تبين مقدار المتجه **OP** وهكذا بالمثل $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$

إذن أو $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$

شكل ١ — ٢٢

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ أى أن $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

٢٢ – أعطيت $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ أوجد مقادير الكميات

أ – $\mathbf{r}_3$ (ب) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$ (جـ) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$

أ – $|\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$

ب – $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

إذن $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = |4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

جـ -
$$2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3 = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$
$$= 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$
إذن $|2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3| = |5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}.$

٢٣ – إذا كان $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}_4 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ أوجد المقادير العددية a, b, c حيث $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$

إذا اعتبرنا

$$3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = a(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + c(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= (2a + b - 2c)\mathbf{i} + (-a + 3b + c)\mathbf{j} + (a - 2b - 3c)\mathbf{k}.$$

حيث أن $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ليست فى مستوى واحد ومن مسألة ١٥

$$2a + b - 2c = 3, \quad -a + 3b + c = 2, \quad a - 2b - 3c = 5$$

بالحل $a = -2,\ b = 1,\ c = -3$ و $\mathbf{r}_4 = -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3$.

المتجه $\mathbf{r}_4$ يكون له علاقة خطية معتمدا على $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ وبعبارة أخرى $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ تكون مجموعة متجهات ذات علاقات خطية . وبمعنى آخر أن ثلاثة (أو أقل) من هذه المتجهات تكون لها علاقة خطية مستقلة .

وبوجه عام المتجهات $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ سميت ذات علاقات خطية إذا أمكننا إيجاد مجموعة من الأعداد $a, b, c, \ldots,$ ليست كلها أصفارا بحيث $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + \ldots = 0$ ولا تكون لها علاقة خطية غير مستقلة .

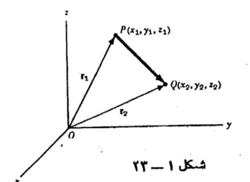
٢٤ – أوجد وحدة المتجه الموازى لمحصلة المتجهات . $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k},\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

المحصلة $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$$R = |\mathbf{R}| = |3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7.$$

إذن وحدة المتجه الموازى للمحصلة $\mathbf{R}$ هى
$$\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{7} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}$$

حقق
$$\left|\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}\right| = \sqrt{(\tfrac{3}{7})^2 + (\tfrac{6}{7})^2 + (-\tfrac{2}{7})^2} = 1$$

٢٥ – عين المتجه الذى بدايته النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونهايته النقطة $Q(x_2, y_2, z_2)$ وأوجد مقداره .



شكل ١ — ٢٣

المتجه الموضعى للنقطة P هو $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

المتجه الموضعى للنقطة Q هو $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

أو $\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$
$$\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

المقدار للمتجه هو

$$PQ = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

لاحظ أن هذا هو المسافة بين النقطتين Q و P

٢٦ – القوى $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ تؤثر على جسم أعطت بدلالة مركباتهم بالمعادلة المتجه

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$$

أوجد مقدار محصلة هذه القوى :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_1 + B_1 + C_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2 + C_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3 + C_3)\mathbf{k}$$

محصلة القوى

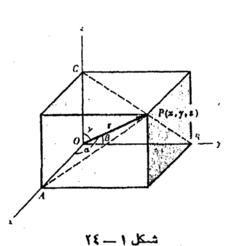
$$= \sqrt{(A_1 + B_1 + C_1)^2 + (A_2 + B_2 + C_2)^2 + (A_3 + B_3 + C_3)^2}$$

مقدار المحصلة

هذه النتيجة يمكن تعميمها على أكثر من ثلاث قوى

٢٧ – عين الزوايا α, β, γ التى يصنعها المتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ مع الاتجاهات الموجبة للإحداثيات العمودية وأثبت أن

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



شكل ١ — ٢٤

من الشكل ١ – ٢٤ المثلث OAP مثلث قائم

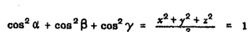
الزاوية عند A ; إذن $\cos\alpha = x/|\mathbf{r}|$ بالمثل من

المثلثين القائمى الزاوية OBP و OCP $\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}$

و $\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$ أيضاً $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

إذن $\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$

والتى يمكن الحصول على α, β, γ ومنها بالتالى فإن



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1$$

الأعداد جتا α و جتا β و جتا γ ، تسمى اتجاهات جيوب التمام للمتجه $\mathbf{OP}$.

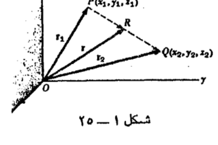
٢٨ – عين مجموعة معادلات الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$.

إذا فرضنا أن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ هى المتجهات الموضعية للنقطتين P و Q على الترتيب و $\mathbf{r}$ هى المتجه الموضعى لأى نقطة R على الخط الواصل بين P و Q .

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PR} = \mathbf{r}$ أو $\mathbf{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ أو $\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

لكن $\mathbf{PR} = t\,\mathbf{PQ}$ حيث t مقدار عددى . حينئذ $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ هى معادلة المتجه المطلوب للخط المستقيم (قارن بمسألة ١٩) .



شكل ١ — ٢٥

بالإحداثيات العمودية يكون $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = t[(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})]$$

أو

$$(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} = t[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}]$$

حيث أن $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ متجهات فى غير مستوى واحد ، فمن مسألة ١٥

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

كما فى المعادلات البارامترية للخط المستقيم ، t هى البارامتر (المتغير) بحذف t تصبح المعادلات

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

٢٩ — أعطيت المجال العددى المعرف بـ $\phi(x, y, z) = 3x^2z - xy^3 + 5$.

أوجد ϕ عند النقط

(أ) $(0, 0, 0)$ (ب) $(1, -2, 2)$ (جـ) $(-1, -2, -3)$

أ — $\phi(0, 0, 0) = 3(0)^2(0) - (0)(0)^3 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$

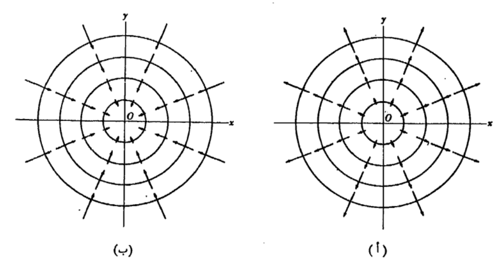
ب — $\phi(1, -2, 2) = 3(1)^2(2) - (1)(-2)^3 + 5 = 6 + 8 + 5 = 19$

جـ — $\phi(-1, -2, -3) = 3(-1)^2(-3) - (-1)(-2)^3 + 5 = -9 - 8 + 5 = -12$

٣٠ — ارسم المجال المتجه المعرف بـ

(أ) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (ب) $\mathbf{V}(x, y) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ (جـ) $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(أ) عند أى نقطة (x, y) ما عدا النقطة $(0, 0)$ من المستوى xy يوجد متجه وحيد $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ مقداره $\sqrt{x^2 + y^2}$ واتجاهه يمر بالأصل وخارج منه . ولتسهيل عملية الرسم يلاحظ أن كل المتجهات المتشاركة مع نقط على الدوائر $x^2 + y^2 = a^2$ و $a > 0$ لها مقدار a . لهذا يظهر المجال كما فى شكل (أ) (١ — ٢٦) باستخدام مقياس رسم مناسب .



شكل ١ ـــ ٢٦

(ب) هنا كل متجه يساوى ويضاد فى الاتجاه المتجه المناظر فى (أ) لذلك يظهر المجال كما فى شكل ب (١ – ٢٦) .

فى شكل (أ) (١ – ٢٦) المجال له مظهر .. مائع منساب من نقطة المنبع O وينسكب فى الاتجهاهات المبينة لهذا السبب يسمى المجال مجالا منبعياً والنقطة O هى المنبع .

فى شكل (ب) (١ – ٢٦) يظهر المجال منساباً نحو O ولذلك يسمى المجال مجال مصبياً وتسمى نقطة O هى المصب .

فى الأبعاد الثلاثة فإن التفسير المناظران هذا المائع يخرج فى اتجاه أنصاف أقطار من خط منبعى أو يرجع فى اتجاه أنصاف أقطار إلى خط مصبى .

المجال المتجه يسمى ذا بعدين حيث أنه مستقل عن z .

(جـ) بما أن مقدار كل متجه هو $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. كل النقط التى على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$ لها متجهات مقدارها a مشاركة معها . المجال يأخذ مظهر المائع الخارج من المنبع O إلى جميع الاتجاهات فى الفراغ . وهذا يسمى المجال المنبعى ثلاثى الأبعاد .

مســـائل متنوعة

٣١ – فيما يلى بين المتجه والعددى ؟ (أ) طاقة الحركة (ب) شدة المجال الكهربى (جـ) أنتروبى (د) الشـغل (هـ) القوة الطاردة المركزية (و) درجة الحرارة (ل) جهد الجاذبية الأرضية (م) الشحنة (ن) إجهاد القصر (ى) التردد .

الحل : (أ) عددى (ب) متجه (جـ) عددى (د) عددى (هـ) متجه (و) عددى (ل) عددى (م) عددى (ن) متجه (ى) عددى .

٣٢ – طائرة قطعت 200 km إلى الغرب ثم 150 km فى 60° شمال الغرب . أوجد محصلة المسافات (أ) بالرسم . (ب) بالتحليل .

الحل : المقدار $304.1 km (50\sqrt{37})$ الاتجاه $25°17'$ شمال الشرق $\text{arc Rin } 3\sqrt{111/74}$.

٣٣ – أوجد محصلة الازاحات الآتية (أ) 20 km 30° جنوب الشرق . (ب) 50 km غرباً (جـ) 40 km شمال الشرق (د) 30 km فى 60° جنوب الغرب .

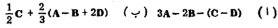
الإجابة : مقدار 20.9 km اتجاه $21°39'$ جنوب الغرب .

٣٤ – بين بالرسم أن $-(A - B) = -A + B$

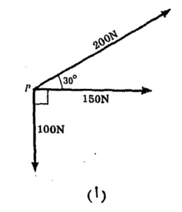
٣٥ – جسم P أثرت عليه ثلاث قوى فى مستوى واحد كما فى شكل ١ – ٢٧ (أ) عين القوة المطلوبة لمنع من الحركة .

الإجابة : 323 N مباشرة عكس القوة 150 N .

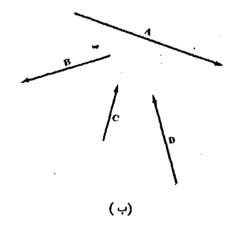
٣٦ – أعطيت المتجهات D و C و B و A و شكل ١ – ٢٧ (ب) كون



(أ) $3A - 2B - (C - D)$ (ب) $\frac{1}{2}C + \frac{2}{3}(A - B + 2D)$



(أ)



(ب)

شكل ١ – ٢٧

٣٧ – إذا كان $ABCDEF$ رؤساً سداسيا منتظما . أوجد محصلة القوى الممثلة بالمتجهات AE و AD و AC و AB

الإجابة 3AD .

٣٨ – إذا كان B و A متجهين بين أن .

(أ) $|A + B| \leq |A| + |B|$ (ب) $|A - B| \geq |A| - |B|$

٣٩ – بين أن :

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$$

٤٠ – مدينتان B و A تقعان مباشرة عكس بعضهما على شاطىء النهر الذى عرضه 8 km . سرعة الماء فى النهر 4 km/h . يقف رجل عند A ويريد أن يصل المدينة C على بعد 6 km مع اتجاه التيار من مدينة B وعلى نفس الشاطىء . فإذا كانت السرعة العظمى للقارب هى 10km . وإذا كان يريد الوصول إلى مدينته C فى أقل وقت ممكن . أوجد اتجاه القارب وكم من الزمن تستغرق الرحلة ؟

الإجابة : يسير فى خط مستقيم يميل بزاوية $34°28'$ على اتجاه الشاطىء والوقت الذى يأخذه ١ ساعة و ٢٥ دقيقة.

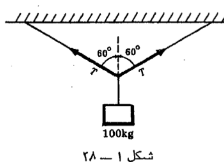
٤١ – رجل يسير بسرعة 15km/h فى اتجاه الجنوب لاحظ أن الريح تهب من الغرب . ولما زاد من سرعته إلى 25 km/h لاحظ أن الريح تهب من الجنوب الغربى . أوجد سرعة واتجاه الريح .

الإجابة : الريح تهب باتجاه $56°18'$ شمال الغرب – وسرعتها 18 km/h

٤٢ – جسم وزنه 100kg علق فى منتصف حبل شكل ١–٢٨ .

عين الشد T فى الحبل .

الإجابة : 100 kg



شكل ١ — ٢٨

٤٣ – أكتب فى أبسط صورة .

$$2\mathbf{A}+\mathbf{B}+3\mathbf{C}-\{\mathbf{A}-2\mathbf{B}-2(2\mathbf{A}-3\mathbf{B}-\mathbf{C})\}$$

الإجابة : $5A - 3B + C$

٤٤ – إذا كان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ متجهين ليسا فى مستوى واحد . $\mathbf{A} = (x+4y)\mathbf{a} + (2x+y+1)\mathbf{b}$ (و) $\mathbf{B} = (y-2x+2)\mathbf{a} + (2x-3y-1)\mathbf{b}$

أوجد y و x بحيث أن $3\mathbf{A} = 2\mathbf{B}$

الإجابة : $x = 2$ و $y = -1$

٤٥ – أعطيت المتجهات الأساسية $\mathbf{a}_3$ و $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_1$ بدلالة المتجهات الأساسية $\mathbf{b}_3$ و $\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{b}_1$ بالعلاقات

$$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$$

فإذا كانت $\mathbf{F} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$ عبر عن $\mathbf{F}$ بدلالة $\mathbf{a}_3$ و $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_1$

الإجابة : $2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$

٤٦ – إذا فرض أن $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ متجهات ليست فى مستوى واحد بين إذا كانت المتجهات $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c},\ \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{a}-5\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ و $\mathbf{r}_3 = 4\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\mathbf{c}$ لها علاقة خطية مستقلة أو علاقة خطية غير مستقلة .

الإجابة : علاقة خطية غير مستقلة لأن $\mathbf{r}_3 = 5\mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2$

٤٧ – إذا كان $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ متجهين يمثلان القطرين فى متوازى الأضلاع . كون متوازى الأضلاع هذا .

٤٨ – أثبت أن الخط الواصل بين منتصف ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث ومقداره يساوى نصفه .

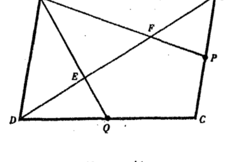
٤٩ – (أ) إذا كان O أى نقطة داخل المثلث ABC و $P\,Q\,R$ هى نقط منتصفات الأضلاع CA و BC و AB على الترتيب .

اثبت أن : $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{OP} + \mathbf{OQ} + \mathbf{OR}$

(ب) إذا كانت O خارج المثلث . فهل النتيجة السابقة صحيحة . برهن ذلك .

الإجابة : نعم

٥٠ – فى الشكل ١ – ٢٩ $ABCD$ متوازى أضلاع النقطتين Q و P منتصف الضلعين BC و CD على الترتيب . اثبت أن AQ و AP يقسمان القطر BD إلى ثلاثة أجزاء متساوية عند النقط F و E.



شكل ١ – ٢٩

٥١ – اثبت أن المستقيمات المتوسطة فى المثلث تتقابل فى نقطة واحدة وتقسمها بنسبة ١ : ٢ .

٥٢ – اثبت أن منصفات زوايا المثلث تتقابل فى نقطة واحدة .

٥٣ – اثبت أنه يوجد مثلث أضلاعه مساوية وموازية للمستقيمات المتوسطة لأى مثلث آخر معلوم .

٥٤ – المتجهات الموضعية للنقطتين O و Q بالنسبة إلى نقطة الأصل هما $\mathbf{q}$ و $\mathbf{p}$ على الترتيب . إذا كانت النقطة P تقسم الخط PQ بنسبة $m:n$. اثبت أن المتجه الموضعى للنقطة R .

يعطى بالعلاقة $\mathbf{r} = \dfrac{m\mathbf{p} + n\mathbf{q}}{m+n}$ وهى مستقلة عن نقطة الأصل .

٥٥ – إذا كانت $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ متجهات موضعية للكتل $m_1, m_2, \ldots, m_n$ على الترتيب بالنسبة إلى نقطة الأصل O.

بين أن المتجه الموضعى لمركز ثقل المجموعة يعطى بالعلاقة

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

وهذا لايعتمد على اختيار نقطة الأصل .

٥٦ – شكل رباعى $ABCD$ وضعت الكتل $1, 2, 3, 4$ على الترتيب عند رؤوسه $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$, $A(-1, -2, 2)$ أوجد احداثيات مركز ثقل المجموعة .

الجواب : $(2, 0, 2)$

٥٧ – بين أن معادلة المستوى الذى يمر بالنقط الثلاث A, B, C والتى لاتقع على خط مستقيم واحد ومتجهاتها بالنسبة إلى نقطة O هى $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ يمكن كتابتها على الصورة

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}}{m + n + p}$$

حيث m, n, P كميات عددية . وهذه المعادلة لاتعتمد على اختيار الأصل .

٥٨ – متجهات الموضع للنقط Q و P تعطى بالعلاقة $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ عين متجه $\mathbf{PQ}$ بدلالة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ أوجد مقداره . الجواب : $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 7$

٥٩ – إذا كان $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

أوجد : (ا) $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}$ (ب) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$ (جـ) $|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|$ (د) وحدة متجه موازى لـ $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$

الإجابة : (ا) $11\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ (ب) $\sqrt{93}$ (جـ) $\sqrt{398}$ (د) $\dfrac{3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}}{\sqrt{398}}$

٦٠ – القوى الآتية تؤثر على النقطة P :

$$\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_4 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

مقاسه بالنيوتن أوجد (أ) محصلة هذه القوى . (ب) مقدار المحصلة .

الإجابة : (أ) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (ب) $\sqrt{5}$.

٦١ – بين فى كل حالة هل المتجهات لها علاقة خطية مستقلة أو علاقة خطية معتمدة (غير مستقلة) .

(أ) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (ب) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

الإجابة : (أ) علاقة خطية غير مستقلة . (ب) علاقة خطية مستقلة .

٦٢ – اثبت أن أى أربع متجهات فى الفراغ يجب أن تكون لها علاقة خطية غير مستقلة .

٦٣ – اثبت أن الشرط اللازم والكافى لكى تكون المتجهات

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$$

علاقة خطية مستقلة هو أن المحدد $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ لايساوى صفراً .

٦٤ – (أ) اثبت أن المتجهات $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ يمكن أن تكون أضلاع مثلث

(ب) أوجد أطوال المستقيمات المتوسطية للمثلث الجواب : (ب) $\sqrt{6}, \ \frac{1}{2}\sqrt{114}, \ \frac{1}{2}\sqrt{150}$

٦٥ – إذا فرضنا المجال العددى $\phi(x, y, z) = 4yz^3 + 3xyz - z^2 + 2$ أوجد (أ) $\phi(1, -1, -2)$ (ب) $\phi(0, -3, 1)$

الإجابة : (أ) 36 (ب) —11

٦٦ – ارسم المجال المتجه المعرف (ا) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ (ب) $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ (جـ) $\mathbf{V}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

الفصل الثانى

ضرب الكميات المتجهة والكميات العددية

ضرب الكميات العددية (د ت) المتجهين B ، A يعرف بـ A · B ويقرأ (A dot B) ويعرف أنه حاصل ضرب مقدارى المتجهين B و A وجتا الزاوية θ المحصورة بينهم بالرموز

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

ويلاحظ أن A · B هى كية عددية وليست متجهة

القوانين الآتية صالحة :

١ – قانون التبديل للضرب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

٢ – قانون التوزيع $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

٣ – حيث m عدد $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m,$

٤ – $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$

٥ – إذا $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ إذن

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

٦ – إذا كان $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ و A و B ليست موجهات صفرية فإن A و B يكونا متعامدين

ضرب الكميات المتجهة لمتجهين A و B هو متجه $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ تقرأ (A cross B) ومقداره حاصل ضرب المتجهين $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ تعرف كحاصل ضرب مقادير A و B وجا الزاوية θ المحصورة بينهما اتجاه المتجه $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ يكون عمودياً على مستوى كل من المتجه A و B وعلى ذلك C و B و A تكون منظومة يمينية وبالرموز

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

حيث $\mathbf{u}$ هى وحدة المتجه التى تبين اتجاه $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ إذا كانت $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ، أو إذا كانت $\mathbf{A}$ توازى $\mathbf{B}$ ، حينئذ $\theta = 0$ وتكون $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

القوانين الآتية صالحة :

١ – (أخفق قانون التبديل للضرب المتجهى) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

٢ – قانون التوزيع $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$

٣ – حيث m كية عددية $m(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})m$,

٤ – $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

٥ – إذا كانت . $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, إذن

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

٦ - مقدار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ تساوى مساحة وتوازى الأضلاع له أضلاعه $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$.

٧ – إذا كانت $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ليست متجهات صفرية حينئذ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ يكونان متساويين .

الضربيات الثلاثية ضربيات الكميات العددية والمتجهة لثلاثة متجهات $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ يمكن أن ينتج ضربيات ذات معنى بالصيغة الآتية $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ و $(\mathbf{A}.\mathbf{B})\mathbf{C}$

القوانين الآتية صالحة :

١ – $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

٢ – $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ = حجم متوازى المستطيلات الذى له $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ كأضلاع ، أو سالباً هذا الحجم تبعاً لما إذا كانت $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ تعمل أو لا تعمل حسب منظومة يمنى

إذا كان $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$,

حينئذ

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

٣ – $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ (قانون الترافق للضرب المتجهى غير قائم)

٤ –

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$$

حاصل ضرب $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ فى بعض الأحيان يسمى حاصل الضرب العددى الثلاثى أو حاصل الضرب الصندوق *Box Product* وأحياناً يعرف بـ $[\mathbf{ABC}]$. حاصل ضرب $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ يسمى حاصل الضرب المتجهه الثلاثى .

فى $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ تحذف الأقواس فى بعض الأحيان وتكتب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ (أنظر مسألة ٤١) على كل حال يجب استعمال الأقواس فى $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (أنظر المسائل ٢٩ و ٤٧)

مجموعة المتجهات العكسية (مقلوبة) مجموعة المتجهات $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}'$ و $\mathbf{b}'$ و $\mathbf{a}'$ تسمى مجموعات عكسية أو أنظمة متجهات إذا كان

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' = 1$$

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$$

المجموعات $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}'$ و $\mathbf{b}'$ و $\mathbf{a}'$ تكون مجموعات متجهة عكسية إذاً وإذ كان فقط

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$$

حيث $\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$ أنظر مسائل ٥٣ — ٥٤

مسائل محلولة

ضرب الكميات العددية (دت)

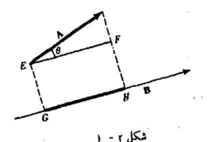
١ — اثبت أن $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

إذن قانون التبديل للضرب العددى صحيح .

٢ — اثبت أن اسقاط $\mathbf{A}$ على $\mathbf{B}$ يكون مساوياً للكمية $\mathbf{A}.\mathbf{b}$ حيث $\mathbf{b}$ وحدة المتجه فى اتجاه $\mathbf{B}$.

الإجابة : خلال نقط البداية والنهاية للمتجه $\mathbf{A}$ مرر مستويات عمودية على المتجه $\mathbf{B}$ عند G و H على الترتيب شكل ٢—١ إذن



شكل ٢ - ١

اسقاط $\mathbf{A}$ على B

$$= \overline{GH} = \overline{EF} = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$$

٣ — اثبت أن $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

ليكن $\mathbf{a}$ وحدة المتجه فى الاتجاه $\mathbf{A}$ حينئذ يكون إسقاط —
$(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ على $\mathbf{A}$ = إسقاط $\mathbf{B}$ على $\mathbf{A}$ + إسقاط $\mathbf{C}$ على $\mathbf{A}$

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{a}$$

بالضرب فى A

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot A\mathbf{a}$$

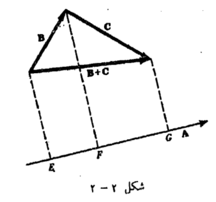
و

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$$

باستخدام قانون التبديل للضرب العددى

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

إذن قانون التوزيع محقق .



شكل ٢ — ٢

٤ — اثبت أن $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$

باستخدام المسألة $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$

قوانين الجبر العادية صالحة لحاصل الضرب العددى .

٥ — احسب كل من الآتى :

(أ) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$

(ب) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{k}| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(جـ) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(د) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$

(هـ) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

٦ — إذا كان $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

اثبت أن $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

حيث أن $\mathbf{i\cdot i} = \mathbf{j\cdot j} = \mathbf{k\cdot k} = 1$ وكل حاصل ضرب العدديات (الكميات العددية) الأخرى تساوى صفراً .

٧ — إذا كان $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ بين أن $A = \sqrt{\mathbf{A\cdot A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

$\mathbf{A\cdot A} = (A)(A)\cos 0^\circ = A^2$ إذن $A = \sqrt{\mathbf{A\cdot A}}$

أيضاً

$$\mathbf{A\cdot A} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$
$$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

من المسألة ٦ نأخذ $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

حينئذ $A = \sqrt{\mathbf{A\cdot A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ هو مقدار $\mathbf{A}$. بعض الأحيان $\mathbf{A\cdot A}$ تكتب $\mathbf{A}^2$

٨ — أوجد الزاوية بين $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$$\mathbf{A\cdot B} = AB\cos\theta, \quad A = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3 \quad B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$$
$$\mathbf{A\cdot B} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$$

حينئذ $\cos\theta = \frac{\mathbf{A\cdot B}}{AB} = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0{\cdot}1905$ وتقريباً $\theta = 79^\circ$

٩ — إذا كان $\mathbf{A.B} = 0$ وإذا كان B و A ليست صفرية بين أن $\mathbf{A}$ عمودية على $\mathbf{B}$.

$\mathbf{A\cdot B} = AB\cos\theta = 0$ إذن $\cos\theta = 0$ أو $\theta = 90^\circ$ و بالعكس إذا كانت $\theta = 90^\circ$ ، $\mathbf{A\cdot B} = 0$

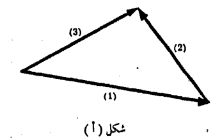
١٠ — أوجد قيمة a بحيث أن $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ يكونان متجهين متعامدين

من المسألة (٩) $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ متجهان متعامدين إذا كانت $\mathbf{A.B} = 0$.

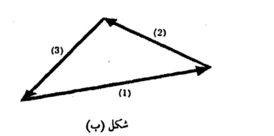
حينئذ $\mathbf{A\cdot B} = (2)(4) + (a)(-2) + (1)(-2) = 8 - 2a - 2 = 0$ أو $a = 3$

١١ — بين أن المتجهات $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \ \mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \ \mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ تكون مثلثاً قائم الزاوية .

نحن نبين أولا أن المتجهات تكون مثلثاً



شكل (أ)



شكل (ب)

شكل ٢ — ٣

من شكل ٢ — ٣ واضح أن المتجهات ستكون مثلثاً إذا كان :

(أ) أحد المتجهات وليكن (٣) هو محصلة أو مجموع (١) و (٢)

(ب) مجموع او محصله المتجهات (١) + (٢) + (٣) يكون صفرا

تبعا لما ذكر فى (ا) المتجهين لهما نقطة نهاية مشتركة أو (ب) ليس لها نقطة نهاية مشتركة . بالمحاولات نجد أن $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ بشرط أن تكون المتجهات مثلثاً .

حيث $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$ ، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$

$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21$ ومنها ينتج أن C و A يكون متعامدان والمثلث يكون قائم الزاوية

١٢ — أوجد الزوايا التى يصنعها المتجه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ مع الاحداثيات الثلاثة المتعامدة .

ليكن γ و β و α هى الزوايا التى يصنعها $\mathbf{A}$ مع الاتجاه الموجب للاحداثيات z و y و x على الترتيب

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (A)(1)\cos\alpha = \sqrt{(3)^2+(-6)^2+(2)^2}\,\cos\alpha = 7\cos\alpha$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = 3\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 3$$

حينئذ تقريباً $86\,\alpha = 3/7 = 0.42 \quad \cos\alpha = 64.6°$

بالمثل $\cos\gamma = 2/7,\ \gamma = 73.4°$ و $\cos\beta = -6/7,\ \beta = 149°$

وجيوب تمام الزوايا γ و β و α تسمى جيوب تمام الاتجاه $\mathbf{A}$ (أنظر مسألة ٢٧ الفصل الأول)

١٣ — أوجد إسقاط المتجه $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ على المتجه $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(7)^2}} = \frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{7}{9}\mathbf{k}$$

وحدة المتجه فى الاتجاه **B** يكون إسقاط **A** على المتجه B يساوى

$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(\frac{4}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{7}{9}\mathbf{k})$$

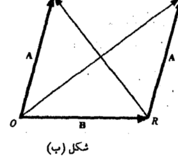
$$= (1)(\frac{4}{9}) + (-2)(-\frac{4}{9}) + (1)(\frac{7}{9}) = \frac{19}{9}$$

١٤ – برهن قانون جيوب التمام للمثلثات المستوية .

من الشكل (٢ – ٤ – أ) $\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}$ أو $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$

إذن $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

و $C^2 = A^2+B^2-2AB\cos\theta$



شكل (ب)

شكل (أ)

شكل ٢ – ٤

١٥ – برهن أن أقطار المعين متعامدة شكل ٢ – ٤ ب

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP}+\mathbf{PQ} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$$

$\mathbf{OR}+\mathbf{RP}=\mathbf{OP}$ أو $\mathbf{B}+\mathbf{RP}=\mathbf{A}$ و $\mathbf{RP}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$

إذن $\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{RP} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = A^2-B^2 = 0$ بما أن $A=B$

إذن **OQ** متعامدة على **RP** .

١٦ – أوجد وحدة المتجه المتعامدة على مستوى كل من $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$

ليكن المتجه $\mathbf{C}=c_1\mathbf{i}+c_2+c_3\mathbf{k}$ متعامدة على المستوى المحتوى كل من **B** و **A** حينئذ يكون **C** متعامد على **A** وأيضاً على **B** وبالتالى

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 2c_1-6c_2-3c_3 = 0$ أو (١) $2c_1-6c_2 = 3c_3$

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = 4c_1+3c_2-c_3 = 0$ أو (٢) $4c_1+3c_2 = c_3$

حل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً $c_1 = \frac{1}{2}c_3 ,\ c_2 = -\frac{1}{3}c_3 ,\ \mathbf{C} = c_3(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$

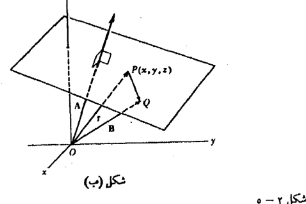
حينئذ وحدة اتجاه المتجه $\mathbf{C}$ هو

$$\frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{c_3(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{c_3^2[(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (1)^2]}} = \pm(\frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}).$$

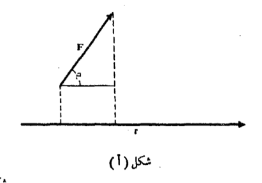
١٧ — أوجد الشغل المبذول لتحريك جسم على طول المتجه $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ إذا كانت القوة المؤثرة $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ شكل (٢ — ٥ — أ)

الشغل المبذول = مقدار القوة فى اتجاه الحركة (المسافة المتحركة)

$$= (F\cos\theta)(r) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$$
$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 6 - 2 + 5 = 9$$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ٢ — ٥

١٨ — أوجد معادلة المستوى العمودى على المتجه $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ويمر خلال نقطة نهاية المتجه $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ شكل (٢ — ٥ — ب)

ليكن $\mathbf{r}$ المتجه الموضعى للنقطة Q و P هى نقطة نهاية المتجه $\mathbf{B}$.

حيث $\mathbf{PQ} = \mathbf{B} - \mathbf{r}$ عمودية على $\mathbf{A}, (\mathbf{B} - \mathbf{r})\cdot\mathbf{A} = 0$ أو $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$ هى المعادلة المطلوبة للمستوى فى شكل متجهى — فى الإحداثيات المتعامدة تصبح

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

أو

$$2x + 3y + 6z = (1)(2) + (5)(3) + (3)(6) = 35$$

١٩ — فى مسألة ١٨ أوجد المسافة بين نقطة الأصل إلى المستوى .

المسافة من نقطة الأصل إلى المستوى هى إسقاط $\mathbf{B}$ على $\mathbf{A}$.

وحدة المتجه فى اتجاه A يكون $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$

إذن إسقاط B على A يساوى

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}) = 1(\frac{2}{7}) + 5(\frac{3}{7}) + 3(\frac{6}{7}) = 5$$

٢٠ — إذا كان A أى متجه . أثبت أن $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$

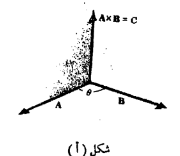
حيث $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = A_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = A_1$

بالمثل $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = A_2$ و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = A_3$.

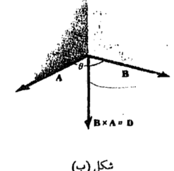
إذن $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$

حاصل ضرب المتجهات :

٢١ — أثبت أن $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$



شكل (أ)



شكل (ب)

شكل ٢ — ٦

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{C}$ لها مقدار $AB\sin\theta$ واتجاه بحيث أن C و B و A تكون منظومة يمنى شكل (٢ — ٦ أ)

$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = \mathbf{D}$ لها مقدار $AB\sin\theta$ واتجاه بحيث أن C و A و B تكون منظومة يمنى شكل (٢ — ٦ ب)

إذن D لها نفس المقدار مثل C ولكن فى الاتجاه المكسى أى أن $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ أو $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

وقانون التبديل لحاصل المتجهات غير صالح

٢٢ — إذا كان $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = 0$ وإذا كان B و A غير صفرية بين أن A توازى B

إذا كان $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u} = 0$ إذن $\sin\theta = 0$ و $\theta = 0°$ أو $180°$

٢٣ — بين أن $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2.$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2+|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2 = |AB\sin\theta\,\mathbf{u}|^2+|AB\cos\theta|^2 = A^2B^2\sin^2\theta + A^2B^2\cos^2\theta$$
$$= A^2B^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$$

٢٤ — احسب كلا من الآتى :

(أ) $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$

(جـ) $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

(د) $\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{k} = -\mathbf{i}$

(هـ) $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = 0$

(و) $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = 0$

(ز) $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times\mathbf{i} = -\mathbf{j}$

(ح) $(2\mathbf{j})\times(3\mathbf{k}) = 6\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} = 6\mathbf{i}$

(ط) $(3\mathbf{i})\times(-2\mathbf{k}) = -6\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} = 6\mathbf{j}$

(ك) $2\mathbf{j}\times\mathbf{i} - 3\mathbf{k} = -2\mathbf{k} - 3\mathbf{k} = -5\mathbf{k}$

٢٥ — أثبت أن $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ للحالة التى فيها **A** عمودية على **B** وأيضاً على **C** .

حيث **A** عمودية على **B** المتجه $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ تكون عمودية على المستوى المحتوى كل من B و A ولهما المقدار $AB\sin 90° = AB$ أو مقدار $A\ B$ هذا معادل لضرب المتجه B فى A ودوران محصلة المتجه خلال زاوية مقدارها ٩٠° إلى الموضع المبين بشكل ٢ — ٧ .

بالمثل $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ هى المتجه الناتج بواسطة ضرب **C** فى A ودوران المحصلة المتجه خلال زاوية ٩٠° كما بالشكل .

شكل ٢ — ٧

بنفس الطريقة $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ هو المتجه الناتج .

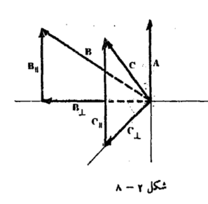
بضرب $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ فى A وبإدارة متجه المحصلة خلال ٩٠° إلى الاتجاه المبين .

حيث $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ هو قطر متوازى الأضلاع مع $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ كأضلاع فيكون $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$.

٢٦ — أثبت أن $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ فى الحالة العامة حيث **C** و **B** و **A** هى متجهات ليست فى مستوى واحد .

بتحليل المتجه **B** إلى مركبتين أحدهما عمودى على **A** والآخر مواز للمتجه **A** ويرمز له بالرموز $\mathbf{B}_{\parallel}$ و $\mathbf{B}_{\perp}$ على الترتيب إذن $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_{\parallel}$.

إذا كانت θ هى الزاوية بين **B** و **A** إذن $B_{\perp} = B\sin\theta$ لذا المقدار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}_{\perp}$ يكون $AB\sin\theta$ بالمثل المقدار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ أيضاً اتجاه $\mathbf{A}\times\mathbf{B}_{\perp}$ يكون له نفس الاتجاه مثل $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ حينئذ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$.



شكل ٢ — ٨

بالمثل إذا حللت $\mathbf{C}$ إلى مركبتين متجهتين $\mathbf{C}_{\parallel}$ و $\mathbf{C}_{\perp}$ الموازى والعمودى للمتجه $\mathbf{A}$ على الترتيب إذن $\mathbf{A}\times\mathbf{C}_{\perp} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$.

أيضاً . حيث $\mathbf{B}+\mathbf{C} = \mathbf{B}_{\perp}+\mathbf{B}_{\parallel}+\mathbf{C}_{\perp}+\mathbf{C}_{\parallel} = (\mathbf{B}_{\perp}+\mathbf{C}_{\perp})+(\mathbf{B}_{\parallel}+\mathbf{C}_{\parallel})$

بالتالى $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_{\perp}+\mathbf{C}_{\perp}) = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

الآن $\mathbf{C}_{\perp}$ و $\mathbf{B}_{\perp}$ متجهات عمودية على $\mathbf{A}$ وأيضاً من المسألة ٢٥

إذن

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_{\perp}+\mathbf{C}_{\perp}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}_{\perp}$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

وقانون التوزيع محقق . بالضرب فى (−١) . واستخدام مسألة ٢١ فإن هذا يصبح $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{A} + \mathbf{C}\times\mathbf{A}$ تذكر أن رتبة المعاملات فى حاصل الضرب المتجهى هام . القوانين العادية للجبر تنطبق فقط إذا أمكن الحفاظ على الترتيب الملائم .

٢٧ — إذا كان $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ and $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ إثبت أن

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k}+A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}+A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j}+A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k}+A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i}+A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j}+A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k} \\
&= (A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

٢٨ — إذا كان

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ أوجد (أ) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ، (ب) $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ (جـ) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

(أ)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

طريقة أخرى

$$\begin{aligned}
(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) &= 2\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) - 3\mathbf{j}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) - \mathbf{k}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) \\
&= 2\mathbf{i}\times\mathbf{i} + 8\mathbf{i}\times\mathbf{j} - 4\mathbf{i}\times\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\times\mathbf{i} - 12\mathbf{j}\times\mathbf{j} + 6\mathbf{j}\times\mathbf{k} - \mathbf{k}\times\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\times\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{k} \\
&= 0 + 8\mathbf{k} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - 0 + 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{i} + 0 = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}
\end{aligned}$$

(ب)

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}.$$

بالمقارنة مع (أ) نجد أن $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$. تذكر أن هذه تعادل النظرية إذا تبادل صفان فى محدد فإن إشارة المحدد تتغير

(ج)

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) + (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) - (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = \mathbf{i}-7\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

إذن

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-7\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}.$$

طريقة اخرى

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A}\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\mathbf{A} - \mathbf{B}\times\mathbf{B} = \mathbf{0} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{0} = -2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$= -2(10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}) = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$ باستخدام (أ)

٢٩ — إذا كان

$\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ اوجد (أ) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ (ب) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

(أ)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

إذن

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (-\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

(ب)

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

إذن

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})\times(-5\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$$

لذا $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ يبين احتياج الأقواس فى $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ لتفادى الغموض .

٣٠ — أثبت أن مساحة متوازى الأضلاع الذى له الأضلاع **A** و **B** هو $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

مساحة متوازى الاضلاع

$$= h|\mathbf{B}|$$
$$= |\mathbf{A}|\sin\theta\,|\mathbf{B}|$$
$$= |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|.$$

تذكر أن مساحة المثلث الذى أضلاعه **A** و **B** هو $\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$

شكل ٢ - ٩

٣١ — أوجد مساحة المثلث التى رؤوسه هى النقط الآتية :

$$P(1,3,2),\ Q(2,-1,1),\ R(-1,2,3)$$

$$\mathbf{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\mathbf{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

من المسألة ٣٠

مساحة المثلث

$$= \tfrac{1}{2}|\mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}| = \tfrac{1}{2}|(\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})|$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|-5\mathbf{i}+\mathbf{j}-9\mathbf{k}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(1)^2+(-9)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{107}$$

٣٢ — حدد وحدة المتجه العمودى على المستوى، $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ متجه عمودى على مستوى **B** و **A**

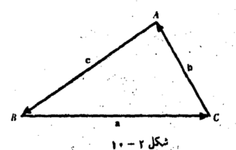
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

وحدة متجه مواز للكمية $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ is $\dfrac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|} = \dfrac{15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2}} = \dfrac{3}{7}\mathbf{i} - \dfrac{2}{7}\mathbf{j} + \dfrac{6}{7}\mathbf{k}$

وحدة متجه آخر . عكس الاتجاه يكون $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/7$

قارن بمسألة ١٦

٣٣ — برهن قانون الجيوب للمثلثات المستوية



شكل ٢ — ١٠

وليكن c و b و a تمثل أضلاع المثلث ABC شكل ٢ — ١٠ ، حينئذ $a + b + c = 0$ بالضرب فى $a \times b \times c$ بالتالى نجد أن

$$a \times b = b \times c = c \times a$$

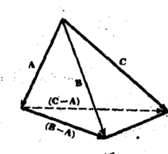
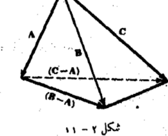
أى أن

$$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

أو

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

٣٤ — اعتبر رباعى السطوح ذا الأوجه F_1 و F_2 و F_3 و F_4 ليكن V_1 و V_2 و V_3 و V_4 متجهات لها قيم تساوى مساحات F_1 و F_2 و F_3 و F_4 على الترتيب واتجاهها عمودية على هذه الأوجه فى اتجاه الخارج بين أن $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$.

شكل ٢ — ١١

من مسألة ٣٠ مساحة وجه المثلث المحدد بالمتجهات R و S هى $\frac{1}{2}|R \times S|$.

المتجهات المصاحبة لكل وجه من أوجه رباعى السطوح تكون

$$V_1 = \tfrac{1}{2} A\times B, \quad V_2 = \tfrac{1}{2} B\times C, \quad V_3 = \tfrac{1}{2} C\times A, \quad V_4 = \tfrac{1}{2}(C-A)\times(B-A)$$

حينئذ

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 + V_4 &= \tfrac{1}{2}[A\times B + B\times C + C\times A + (C-A)\times(B-A)] \\ &= \tfrac{1}{2}[A\times B + B\times C + C\times A + C\times B - C\times A - A\times B + A\times A] = 0 \end{aligned}$$

يمكن أن تعمم النتائج لتشمل متعدد السطوح، وفى الحالة المحددة إلى أى سطح مغلق .

بسبب تطبيق هذه الحالة فى بعض الأحيان يكون من المناسب أن نعين اتجاه المساحة ونتكلم عن مساحة المتجه .

٣٥ — أوجد تعبيرا لعزم القوة F حول النقطة P

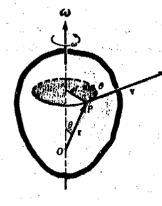
العزم M للقوة F حول P هى مقدار يساوى حاصل ضرب القوة فى المسافة العمودية من F إلى خط تأثير القوة F . حينئذ إذا كان r متجه من النقطة P إلى نقطة البداية Q للقوة F ,

$$M = F(r \sin \theta) = rF \sin \theta = |r \times F|$$

إذا تذكرنا أسنان قلاووظ أيمن عند P عمودية على مستوى r و F حينئذ عندما يؤثر القوة F يدور القلاووظ فى اتجاه $r \times F$ لهذا السبب من الملائم تعريف العزم على أنه متجه $M = r \times F$.

شكل ٢ — ١٢

٣٦ – يدور جسم صلب حول محور خلال نقطة O بسرعة زاوية ω أثبت أن السرعة الخطية $\mathbf{v}$ للنقطة P على الجسم التى لها المتجه الموضعى $\mathbf{r}$ يعطى بالعلاقة $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ حيث $\boldsymbol{\omega}$ هى متجه له المقدار ω وله الاتجاه الأيمن لأسنان القلاووظ الذى يتقدم تحت الدوران المعطى .



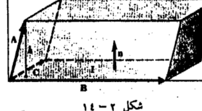
شكل ٢ - ١٣

حيث P تتحرك فى دائرة نصف قطرها $r \sin \theta$ مقدار السرعة الخطية $\mathbf{v}$ تكون $\omega (r \sin \theta) = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$ أيضا $\mathbf{v}$ لابد أن تكون عمودية على كل من $\mathbf{r}$ و $\boldsymbol{\omega}$ على كل حال $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ تكون منظومة يمنى .

إذن $\mathbf{v}$ يكون لها مقدارا واتجاه $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. حينئذ $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. المتجه $\boldsymbol{\omega}$ يسمى السرعة الزاوية .

الضربيات الثلاثية :

٣٧ – بين أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب الكية $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ يكون مساويا لحجم المكعب الذى جوانبه $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$.



شكل ٢ – ١٤

ليكن $\mathbf{n}$ وحدة العمود لمتوازى المستطيلات I له الاتجاه $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ وليكن h ارتفاع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{A}$ أعلى متوازى الأضلاع I

حجم متوازى الأضلاع = (الأرتفاع) (مساحة متوازى الأضلاع)

$$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|)$$
$$= \mathbf{A} \cdot \{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\, \mathbf{n}\} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

إذا كان $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ غير مكونة لمنظومة يمنى $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} < 0$ والحجم يساوى $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

٣٨ – إذا كان $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ بين أن

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}]$$

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

٣٩ – احسب $(2i - 3j) \cdot [(i + j - k) \times (3i - k)]$

من مسألة ٣٨ ، النتيجة تكون $= 4$. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

طريقة أخرى . النتيجة تساوى

$$\begin{aligned} &(2i - 3j) \cdot [i \times (3i - k) + j \times (3i - k) - k \times (3i - k)] \\ &= (2i - 3j) \cdot [3i \times i - i \times k + 3j \times i - j \times k - 3k \times i + k \times k] \\ &= (2i - 3j) \cdot (0 + j - 3k - i - 3j + 0) \\ &= (2i - 3j) \cdot (-i - 2j - 3k) = (2)(-1) + (-3)(-2) + (0)(-3) = 4 \end{aligned}$$

٤٠ – أثبت أن $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$

من المسألة ٣٨ $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

من نظرية المحددات والتى تقول أن تغير صفين للمحدد تغير إشارته لدينا

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C \cdot (A \times B)$$

٤١ – بين أن $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

من مسألة ٤٠ $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = (A \times B) \cdot C$

أحيانا $A \cdot (B \times C)$ تكتب بدون أقواس $A \cdot B \times C$ فى هذه الحالة لا يمكن أن يوجد غموض حيث أن الأقواس الوحيدة الممكنة هى $A \cdot (B \times C)$ أو $(A \cdot B) \times C$ ولو أن الحالة الأخيرة ليس لها معنى حيث أن حاصل ضرب المتجه فى العدد غير محدد .

النتيجة $A \cdot B \times C = A \times B . C$ يلخص فى بعض الأحيان فى جملة أن الكمية العددية أو المتجه يمكن أن تتبادل بدون تأثير على النتيجة .

٤٢ – أثبت أن $A \cdot (A \times C) = 0$

من مسألة ٤١ $A \cdot (A \times C) = (A \times A) \cdot C = 0$.

٤٣ – أثبت أنه الشرط الضرورى والكافى لكى تكون المتجهات C و B و A فى مستوى واحد هى $A \cdot B \times C = 0$

تذكر أن $A \cdot B = C$ يمكن أن لا يكون لها معنى خلاف $A \cdot (B \times C)$

إذا كان C و B و A فى نفس المستوى فإن حجم متوازى المستطيلات المتكون منها يساوى صفرا ومن مسألة ٣٧ $A\cdot B\times C=0$.

وبالعكس . فإذا كانت $A\cdot B\times C=0$ فإن حجم متوازى المستطيلات الناشئ من المتجهات C و B و A يساوى صفرا وكذلك يجب أن تكون المتجهات فى مستوى واحد .

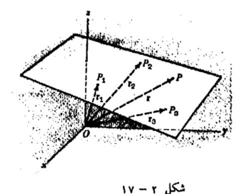
٤٤ – ليكن $r_3=x_3i+y_3j+z_3k$ و $r_1=x_1i+y_1j+z_1k,\ r_2=x_2i+y_2j+z_2k$ وضع المتجهات الموضعية للنقط $P_1(x_1,y_1,z_1),\ P_2(x_2,y_2,z_2)$ و $P_3(x_3,y_3,z_3)$
أوجد معادلة المستوى المار بالنقط P_1 و P_2 و P_3

نفترض أن P_3 و P_2 و P_1 غير واقعين على نفس الخط المستقيم إذن فهذه النقط تحدد المستوى .

إذا كان $r=xi+yj+zk$ يمثل متجه موضعى لأى نقطة $P(x,y,z)$ فى المستوى . أعتبر المتجهات $P_1P_2=r_2-r_1,\ P_1P_3=r_3-r_1$ و $P_1P=r-r_1$ والكل يقع فى المستوى .

من المسألة ٤٣ $P_1P\cdot P_1P_2\times P_1P_3=0$

أو $(r-r_1)\cdot(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)=0$



شكل ٢ – ١٧

تصبح هذه المعادلة باستخدام الاحداثيات المتعامدة .

$$[(x-x_1)i+(y-y_1)j+(z-z_1)k]\cdot[(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k]\times[(x_3-x_1)i+(y_3-y_1)j+(z_3-z_1)k]=0$$

أو بإستخدام مسألة ٣٨

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

٤٥ – أوجد معادلة المستوى المحدد بالنقط $P_1(2,-1,1),\ P_2(3,2,-1)$ و $P_3(-1,3,2)$.

المتجهات الموضعية P_1,P_2,P_3 وأى نقطة $P(x,y,z)$ هى على الترتيب

$$r_1=2i-j+k,\quad r_2=3i+2j-k\quad r_3=-i+3j+2k \quad \text{و} \quad r=xi+yj+zk$$

إذن $P_3P_1=r_3-r_1,\quad P_2P_1=r_2-r_1,\quad PP_1=r-r_1$ الكل يقع فى المستوى المطلوب وبالتالى

$$(r-r_1)\cdot(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)=0$$

أى أنه

$$[(x-2)i+(y+1)j+(z-1)k]\cdot[i+3j-2k]\times[-3i+4j+k]=0$$

$$[(x-2)i+(y+1)j+(z-1)k]\cdot[11i+5j+13k]=0$$

$$11(x-2)+5(y+1)+13(z-1)=0 \quad \text{or} \quad 11x+5y+13z=30$$

٤٦ – إذا كانت النقط P,Q,R ليست كلها واقعة على نفس الخط المستقيم ولها المتجهات الموضعية a,b,c بالنسبة لنقطة الأصل المعطاة . بين أن $a\times b+b\times c+c\times a$ هو متجه عمودى على مستوى P,Q,R .

ليكن r متجه موضعى لأى نقطة فى المستوى P,Q,R إذن المتجهات $b-a,\ r-a$ و $c-a$ تكون فى مستوى لذلك فن المسألة ٤٣

$$(r-a)\cdot(b-a)\times(c-a)=0 \quad \text{أو} \quad (r-a)\cdot(a\times b+b\times c+c\times a)=0$$

فإن $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ يكون عموديا على $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ وبالتالى عموديا على المستوى المحتوى P, Q, R

٤٧ – أثبت أن (أ) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ (ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

(١) ليكن $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k},\quad \mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k},\quad \mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$

إذن

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times([B_2C_3-B_3C_2]\mathbf{i}+[B_3C_1-B_1C_3]\mathbf{j}+[B_1C_2-B_2C_1]\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_2C_3-B_3C_2 & B_3C_1-B_1C_3 & B_1C_2-B_2C_1\end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_1C_2-A_2B_2C_1-A_3B_3C_1+A_3B_1C_3)\mathbf{i}+(A_3B_2C_3-A_3B_3C_2-A_1B_1C_2+A_1B_2C_1)\mathbf{j}$$
$$+(A_1B_3C_1-A_1B_1C_3-A_2B_2C_3+A_2B_3C_2)\mathbf{k}$$

أيضاً

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$= (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})(A_1C_1+A_2C_2+A_3C_3)-(C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k})(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$
$$= (A_2B_1C_2+A_3B_1C_3-A_2C_1B_2-A_3C_1B_3)\mathbf{i}+(B_2A_1C_1+B_2A_3C_3-C_2A_1B_1-C_2A_3B_3)\mathbf{j}$$
$$+(B_3A_1C_1+B_3A_2C_2-C_3A_1B_1-C_3A_2B_2)\mathbf{k}$$

وتتبع النتيجة

(ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ بإحلال $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ فى (١) محل $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ على الترتيب

يلاحظ أن $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} \neq \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ أى أن قانون ترتيب الضرب المتجهى غير صالح لكل المتجهات $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

٤٨ – أثبت $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

من المسألة ٤١ إذن $\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{X}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}$ ليكن $\mathbf{X}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ، إذن

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\}\cdot\mathbf{D} = \{\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\}\cdot\mathbf{D}$$
$$= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}),$$ باستخدام المسألة رقم ٤٧ (ب)

٤٩ – أثبت $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0.$

من مسألة (٤٧ - ١)

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$
$$\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})$$

بالجمع نحصل على النتيجة

٥٠ – أثبت $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D})-\mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ ،

من مسألة (٤٧ – ١) $\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{D})-\mathbf{D}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$ ليكن $\mathbf{X}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

إذن

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$
$$= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

من مسألة (٤٧ ــ ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{Y} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{Y})$ ليكن $\mathbf{Y}=\mathbf{C}\times\mathbf{D}$؛

إذن $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D})$

٥١ ــ ليكن PQR مثلثا كرويا له الجوانب p, q, r عبارة عن أقواس من دوائر كبيرة . أثبت أن

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

بفرض أن قطر الكرة هو الوحدة (أنظر شكل ٢ ــ ٦) إذا كانت وحدة المتجها ت $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ قد رسمت من مركز الكره O إلى P, Q, R على الترتيب فن المسألة ٥٠

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\mathbf{A} \qquad (١)$$

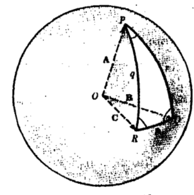
وحدة المتجه العمودى على $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ هو $\mathbf{A}$

وبالتالى (١) تصبح

$$\sin r\ \sin q\ \sin P\ \mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\mathbf{A} \qquad (٢)$$
$$\sin r\ \sin q\ \sin P = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} \qquad (٣)$$

بالتبادل الدورى للكميات P, Q, R و p, q, r و $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ نحصل على

$$\sin p\ \sin r\ \sin Q = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A} \qquad (٤)$$
$$\sin q\ \sin p\ \sin R = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (٥)$$



شكل ٢ ــ ١٦

إذن حيث أن الطرف الأيمن للمعادلات (٣) ، (٤) ، (٥) متساوية (مسألة ٤٠)

$$\sin P = \sin p\ \sin r\ \sin Q = \sin q\ \sin p\ \sin R$$

منها يمكن الحصول على $\dfrac{\sin P}{\sin p} = \dfrac{\sin Q}{\sin q} = \dfrac{\sin R}{\sin r}$

وهذا يسمى قانون الجيوب للمثلث الكروى

٥٢ ــ أثبت أن $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2$

من مسألة (٤٧ ــ ١) $\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$ ليكن $\mathbf{X}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ إذن

$$(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})$$
$$= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

لــذا

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$
$$= (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2$$

٥٣ – أعطيت المتجهات $c' = \dfrac{a \times b}{a \cdot b \times c}$ و $b' = \dfrac{c \times a}{a \cdot b \times c}$, $a' = \dfrac{b \times c}{a \cdot b \times c}$ بين أنه إذا كان $a \cdot b \times c \neq 0$

(أ) $a' \cdot a = b' \cdot b = c' \cdot c = 1,$

(ب) $a' \cdot b = a' \cdot c = 0,\quad b' \cdot a = b' \cdot c = 0,\quad c' \cdot a = c' \cdot b = 0,$

(جـ) $\text{if } a \cdot b \times c = V$ إذن $a' \cdot b' \times c' = 1/V$

أى a', b', c' متجهات ليست فى مستوى واحد إذا لم تكن a, b, c فى مستوى واحد

(أ)
$$a' \cdot a = a \cdot a' = a \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

$$b' \cdot b = b \cdot b' = b \cdot \frac{c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

$$c' \cdot c = c \cdot c' = c \cdot \frac{a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{c \cdot a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

(ب)
$$a' \cdot b = b \cdot a' = b \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \times b \cdot c}{a \cdot b \times c} = 0$$

بالمثل يمكن الحصول على النتائج الأخرى . النتائج يمكن الحصول عليها إذا لاحظنا مثلا أن . المتجه a' له اتجاه $b \times c$ وبالتالى لابد أن يكون عموديا على كل b و c . ومنها $a' \cdot c = 0$ $a' \cdot b = 0$

من (أ) ، (ب) نلاحظ أن مجموعة المتجهات a, b, c و a', b', c' تكون متجهات متعاكسة أنظر المسائل المتنوعة ١٠٤ و ١٠٦

(جـ)
$$a' = \frac{b \times c}{V},\quad b' = \frac{c \times a}{V},\quad c' = \frac{a \times b}{V}$$

إذن
$$a' \cdot b' \times c' = \frac{(b \times c) \cdot (c \times a) \times (a \times b)}{V^3} = \frac{(a \times b) \cdot (b \times c) \times (c \times a)}{V^3}$$

$$= \frac{(a \cdot b \times c)^2}{V^3} = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}$$ باستخدام مسألة ٥٢

(د) من مسألة ٤٣ إذا كانت المتجهات a, b, c ليست فى مستوى واحد $a \cdot b \times c \neq 0$ إذن من الجزء (د) ينتج أن $a' . b' \times c' \neq 0$ بحيث أن $a', b' \ c'$ ليست فى مستوى واحد

٥٤ – بين أن أى متجه r يمكن التعبير عنه بمعلومية المتجه العكسى المبين بالمسألة ٥٣ .

$$r = (r \cdot a')a + (r \cdot b')b + (r \cdot c')c$$

من المسألة (٥٠)
$$B(A \cdot C \times D) - A(B \cdot C \times D) = C(A \cdot B \times D) - D(A \cdot B \times C)$$

إذن
$$D = \frac{A(B \cdot C \times D)}{A \cdot B \times C} - \frac{B(A \cdot C \times D)}{A \cdot B \times C} + \frac{C(A \cdot B \times D)}{A \cdot B \times C}$$

ليكن $A = a,\ B = b,\ C = c$ و $D = r$

$$r = \frac{r \cdot b \times c}{a \cdot b \times c}a + \frac{r \cdot c \times a}{a \cdot b \times c}b + \frac{r \cdot a \times b}{a \cdot b \times c}c$$

$$= r \cdot \left(\frac{b \times c}{a \cdot b \times c}\right)a + r \cdot \left(\frac{c \times a}{a \cdot b \times c}\right)b + r \cdot \left(\frac{a \times b}{a \cdot b \times c}\right)c$$

$$= (r \cdot a')a + (r \cdot b')b + (r \cdot c')c$$

مسائل متنوعة

٥٥ – احسب (أ) $k \cdot (i + j)$ (ب) $(i - 2k) \cdot (j + 3k)$ (جـ) $(2i - j + 3k) \cdot (3i + 2j - k)$

الإجابة : (أ) 0 (ب) 6 (جـ) 1.

٥٦ – إذا كان $A = i + 3j - 2k$ و $B = 4i - 2j + 4k$ ، أوجد (أ) $A \cdot B$ (ب) A (جـ) B (د) $|3A + 2B|$ (هـ) $(2A + B) \cdot (A - 2B)$

(أ) -10 (ب) $\sqrt{14}$ (جـ) 6 (د) $\sqrt{150}$ (هـ) -14

٥٧ – أوجد الزاوية بين (أ) $A = 3i + 2j - 6k$ و $B = 4i - 3j + k$ (ب) $C = 4i - 2j + 4k$ و $D = 3i - 6j - 2k$

(أ) 90° (ب) $\text{arc cos } 8/21 = 67^\circ 36'$

٥٨ – لأى قيمة a تكون $B = 2ai + aj - 4k$ و $A = ai - 2j + k$ عمودية ؟ الإجابة $a = 2, -1$

٥٩ – أوجد الزاوية الحادة التى يصنعها الخط الواصل بين النقطتين $(1, -3, 2)$ و $(3, -5, 2)$ والاحداثيات المتعامدة

الإجابة $48^\circ 12', 48^\circ 12', 70^\circ 32'$ أو $\text{arc cos } 2/3, \ \text{arc cos } 2/3, \ \text{arc cos } 1/3$

٦٠ – أوجد اتجاه جيوب التمام الواصل بين النقط $(3, 2, -4)$ و $(1, -1, 2)$

الإجابة $-2/7, -3/7, 6/7$ أو $2/7, 3/7, -6/7$

٦١ – ضلعان من أضلع المثلث تتكونان من المتجهين $A = 3i + 6j - 2k$ و $B = 4i - j + 3k$ حدد زوايا المثلث

الإجابة $36^\circ 4', 53^\circ 56', 90^\circ$ أو $\text{arc cos } 7/\sqrt{75}, \ \text{arc cos } \sqrt{26}/\sqrt{75}, \ 90^\circ$

٦٢ – أعطيت أقطار متوازى الأضلاع بالمتجهين $A = 3i - 4j - k$ و $B = 2i + 3j - 6k$ بين أن متوازى الأضلاع يكون معينا . واحسب أطوال أضلاعه وزواياه

الإجابة $4.33, 72^\circ 8', 107^\circ 52'$ أو $5\sqrt{3}/2, \ \text{arc cos } 23/75, \ 180^\circ - \text{arc cos } 23/75$

٦٣ – أوجد اسقاط المتجه $2i - 3j + 6k$ على المتجه $i + 2j + 2k$ الإجابة $3/3$

٦٤ – أوجد اسقاط المتجه $4i - 3j + k$ على الخط الواصل بين النقط $(2, 3, -1)$ و $(-2, -4, 3)$ الاجابة . ١

٦٥ – إذا كان $A = 4i - j + 3k$ و $B = -2i + j - 2k$ ، أوجد وحدة المتجه العمودى على كل من A و B

الإجابة $\pm (i - 2j - 2k)/3$

٦٦ – أوجد الزاوية الحادة المحصورة بين قطرى المكعب الإجابة $\cos 1/3 \ \ 70^\circ 32'$

٦٧ – أوجد وحدة المتجه الموازى للمستوى xy وعمودى على المتجه $4i - 3j + k$ الإجابة $\pm (3i + 4j)/5$

٦٨ – بين أن $A = (2i - 2j + k)/3$, $B = (i + 2j + 2k)/3$ و $C = (2i + j - 2k)/3$ هى وحدة المتجهات العمودية المتبادلة .

٦٩ – أوجد الشغل المبذول لتحريك جسم على خط مستقيم بين $(3, 2, -1)$ إلى $(2, -1, 4)$ فى مجال القوة المعطاة بالمعادلة $F = 4i - 3j + 2k$ الإجابة 15

٧٠ – ليكن F متجها ثابتا لقوة المجال . بين أن الشغل المبذول فى تحريك جسم حول أى مضلع مغلق فى مجال القوة يساوى صفرا .

٧١ — أثبت أن الزاويه المحصورة فى نصف الدائرة تكون قائمة .

٧٢ — ليكن $ABCD$ متوازى الأضلاع أثبت أن $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

٧٣ — إذاكان $ABCD$ شكلا رباعيا وكانت P و Q هى نقط منتصف الأقطار أثبت أن

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2$$

وهذا هو تعميم للمسألة السابقة

٧٤ — (ا) أوجد معادلة المستوى العمودى على المتجه $\mathbf{A}$ والمسافة p من نقط الأصل .

(ب) عبر عن المعادلة التى فى (ا) بالاحداثيات الثلاث العمودية

الإجابة : (ا) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$ حيث $\mathbf{n} = \mathbf{A}/A$ (ب) $A_1x + A_2y + A_3z = Ap$

٧٥ — ليكن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ هى وحدة المتجهات فى المستوى xy والتى تصنع زاوية مقدارها α و β مع الاتجاه الموجب لمحور x

(ا) أثبت أن $\mathbf{r}_1 = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \sin\alpha\ \mathbf{j},\ \ \mathbf{r}_2 = \cos\beta\ \mathbf{i} + \sin\beta\ \mathbf{j}$

(ب) باعتبار $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ أثبت القوانين المثلثية

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$

٧٦ — ليكن $\mathbf{a}$ هو متجه الموضع لنقطة معلومة (x_1, y_1, z_1) والمتجه $\mathbf{r}$ هو متجه الموضع لأى نقطة (x, y, z) أوجد المحل الهندسى للمتجه $\mathbf{r}$ إذاكان (ا) $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = 3$ (ب) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} = 0$ (ج) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = 0$

الاجابة : (ا) كرة مركزها عند النقطة (x_1, y_1, z_1) ونصف قطرها ٣

(ب) مستوى عمودى على $\mathbf{a}$ ويمر خلال نقطة نهايته

(ج) كرة مركزها عند النقطة $(x_1/2, y_1/2, z_1/2)$ ونصف قطرها مقداره $\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

أوكرة قطرها $\mathbf{a}$.

٧٧ — أعطيت المتجهين الموضعين $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ النقطتين P, Q على الترتيب .

(ا) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة Q وعمودي على الخط PQ

(ب) ما هى المسافة بين النقطة $(-1, 1, 1)$ والمستوى ؟

الإجابة : (ا) $(\mathbf{r}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = 0$ أو $2x + 3y + 6z = -28$ (ب) 5

٧٨ — أحسب كلاً من الآتى :

(ا) $2\mathbf{j}\times(3\mathbf{i}-4\mathbf{k})$ ، (ب) $(\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times\mathbf{k}$ ، (ج) $(2\mathbf{i}-4\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j})$ ، (د) $(4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+\mathbf{k})$

(هـ) $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})$.

الاجابة : (ا) $-8\mathbf{i}-6\mathbf{k}$ ، (ب) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ، (ج) $8\mathbf{i}-4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ، (د) $\mathbf{i}-10\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ، (هـ) $2\mathbf{i}-11\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

٧٩ — إذا كان $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ أوجد : (ا) $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ ، (ب) $(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\times(2\mathbf{A}-\mathbf{B})$ ،

(ج) $|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})|$.

الاجابة : (ا) $\sqrt{195}$ ، (ب) $-25\mathbf{i}+35\mathbf{j}-55\mathbf{k}$ ، (ج) $2\sqrt{195}$.

٨٠ — إذا كان $\mathbf{A} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ أوجد

(ا) $|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}|$ ، (ج) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ ، (هـ) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

(ب) $|A\times(B\times C)|$ ، (د) $(A\times B).C$ ، (و) $(A\times B)(B.C)$

الاجابة : (ا) $5\sqrt{26}$ ، (ب) $3\sqrt{10}$ ، (جـ) -20 ، (د) -20 ، (هـ) $-40i-20j+20k$ ،
(و) $35i-35j+35k$.

٨١ – بين أنه إذا كان $A \neq 0$ وكل من الشرطين (ا) $A\cdot B = A\cdot C$ (ب) $A \times B = A \times C$ متحققين انيا فإن $B = C$ ولكن إذا تحقق شرط واحد من هذين شرطين فلا بد من الضرورى أن تكون $B \neq C$

٨٢ – أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى له الأقطار $B = i-3j+4k$, و $A = 3i+j-2k$ الإجابة : $5\sqrt{3}$

٨٣ – أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه هى النقط $(4,-8,1)$ و $(1,-1,-3)$, $(3,-1,2)$ الإجابة : $\frac{1}{2}\sqrt{165}$

٨٤ – إذا كان $A = 2i+j-3k, B = i-2j+k$ أوجد المتجه الذى مقداره 5 وعمودى على كل من B و A

الإجابة : $\pm \frac{5\sqrt{3}}{3}(i+j+k)$

٨٥ – استخدم مسألة ٧٥ لاشتقاق الصيغة

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

٨٦ – أعطيت قوة $F = 3i+2j-4k$ وتؤثر على النقطة $(1,-1,2)$ أوجد عزم القوة F على النقطة $(2,-1,3)$

الإجابة : $2i-7j-2k$

٨٧ – السرعة الزاوية لجسم يدور حول محور دوران يعطى بالمعادلة $\omega = 4i+j-2k$ أوجد السرعة الخطية للنقطة P على الجسم التى متجهها الموضعى بالنسبة لنقطة تمر على محور الدوران هو $2i-3j+k$ الإجابة $-5i-8j-14k$

٨٨ – اختصر $(A+B)\cdot(B+C)\times(C+A)$ الإجابة : $2A\cdot B\times C$

٨٩ – أثبت أن

$$(A\cdot B\times C)(a\cdot b\times c) = \begin{vmatrix} A\cdot a & A\cdot b & A\cdot c \\ B\cdot a & B\cdot b & B\cdot c \\ C\cdot a & C\cdot b & C\cdot c \end{vmatrix}$$

٩٠ – أوجد حجم متوازى السطوح التى تكون حروفه ممثلة بالمعادلات $A = 2i-3j+4k,\ B = i+2j-k$
$C = 3i-j+2k$ الإجابة 7

٩١ – إذا كان $A.B\times C = 0$ بين أن كلا (ا) A, B, C متجهات تقع فى نفس المستوى ولكن كل اثنين منهما لا تقع على نفس الخط المستقيم أو (ب) متجهان من A, B, C على خط مستقيم أو (جـ) كل المتجهات A, B, C على خط مستقيم .

٩٢ – أوجد الثابت a بحيث أن المتجهات $2i-j+k$ و $3i+aj+5k$ تكون فى نفس المستوى .

الإجابة : $a = -4$

٩٣ – إذا كان $B = x_2a+y_2b+z_2c$ ، $A = x_1a+y_1b+z_1c$ و $C = x_3a+y_3b+z_3c$

أثبت أن

$$(a\cdot b\times c)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = A\cdot B\times C$$

٩٤ — برهن أنه الشرط اللازم والكافى لكى $(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ هو $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = 0$. ناقش الحالات التى فيها $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$ أو $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$.

٩٥ — لتكن متجهات الموضع بالنسبة لنقطة الأصل O. للنقط R, P, Q هى $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ، $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
أوجد المسافة بين النقطة P والمستوى OQR الإجابة : 3

٩٦ — أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(6, -4, 4)$ والخط الذى يصل النقطتين $(2, 1, 2)$ و $(3, -1, 4)$ الإجابة 3

٩٧ — أعطيت النقط $P(2,1,3), Q(1,2,1), R(-1,-2,-2)$ و $S(1,-4,0)$ أوجد أقصر مسافة بين الخطين PQ و RS
الإجابة : $3\sqrt{2}$

٩٨ — أثبت أن الأعمدة الساقطة من رؤوس المثلث على الضلعه المقابلة (تمتد إذا كان من الضرورى) تتقابل فى نقطة (ملتقى الارتفاعات للمثلث) .

٩٩ — أثبت أن منصفات الأعمدة لأضلاع المثلث تتقابل فى نقطة (مركز الدائرة المحيطة بالمثلث) .

١٠٠ — أثبت أن $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$

١٠١ — ليكن PQR مثلثا كرويا له الأحرف p, q, r عبارة عن أقواس من دوائر كبيرة . أثبت أن جيوب التمام للمثلث الكروى هــو

$$\cos p = \cos q \cos r + \sin q \sin r \cos P$$

باستخدام صيغة التشابه $\cos q \cos r$ يمكن الحصول عليها بالتبادل الدورى للحروف
(تنويه) علل كل جانب من المتطابقة $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$.]

١٠٢ — أوجد مجموعة المتجهات العكسية للمجموعة $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

الإجابة : $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{k},\ -\frac{8}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{7}{3}\mathbf{k},\ -\frac{7}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{5}{3}\mathbf{k}$

١٠٣ — إذا كان $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$ ، $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$ و $\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$ أثبت أن

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}$$

١٠٤ — إذا كانت المتجهات $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ و $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ كالآتى

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1$$

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

أثبت أنه من اللازم أن

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

١٠٥ — أثبت أن مجموعات المتجهات اليمينية الذاتية التماكس الوحيده هى وحدة المتجهات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

١٠٦ — أثبت أنه يوجد فقط مجموعة واحدة من المتجهات العكسية لمجموعة معلومة $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ من المتجهات غير الواقعة فى مستوى واحد .

الفصل الثالث

تفاضل المتجه

المشتقات العادية للمتجهات : ليكن $\mathbf{R}(u)$ متجه متوقف على متغير عدد فردى u إذن

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

شكل ٣ − ١

حيث Δu تبين زيادة فى u أنظر

المشتقه العادية للمتجه $\mathbf{R}(u)$ بالنسبة للتغير العددى u يعطى للمعادلة الآتية

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

إذا وجدت الحدود (النهايات)

حيث أن $\frac{d\mathbf{R}}{du}$ هو نفسه متجه يتوقف على u. فإنه يمكننا أن نعتبر مشتقتها بالنسبة إلى u ، وإذا كانت هـذه المشتقة موجوده فإنها تعرف بالكميه $\frac{d^2\mathbf{R}}{du^2}$ بمثل هذه الطريقة يمكن وصف المشتقات ذات الرتبة الأعلى .

منحنيات الفراغ : إذا كان بصفة خاصة $\mathbf{R}(u)$ هو متجه موضعى $\mathbf{r}(u)$ يربط نقطة الأصل O لنظام إحداثيات وأى نقطة (x, y, z) إذن

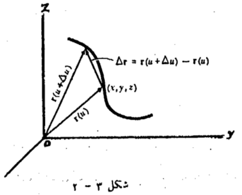
$$\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$$

ومواصفات دالة المتجه $\mathbf{r}(u)$ تعرف x, y, z كدالة فى u .

عندما تتغير u ، نقطة نهاية المتجه $\mathbf{r}$ ترسم منحنى فراغ له البرامترية الآتية

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

حينئذ $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{r}(u+\Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u}$ متجه فى اتجاه $\Delta \mathbf{r}$ (شكل ٣ − ٢) . إذا كان $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$ موجودة . فإن النهايات سوف تكون متجهاً فى



شكل ٣ − ٢

اتجاه المماس لمنحنى الفراغ عند (x, y, z) والمعطى بالمعادلة

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

إذا كان u هو الزمن t و $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ تمثل السرعة $\mathbf{v}$ التى بواسطة نقطة نهاية المتجه $\mathbf{r}$ يرسم المنحنى . بالمثل $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ تمثل عجلتها $\mathbf{a}$ على طول المنحنى

الاستمرار والتفاضلية (القابلية للتفاضل): الدالة العددية $\phi(u)$ تسمى دالة مستمرة عند u إذا كان $\lim_{\Delta u \to 0} \phi(u+\Delta u) = \phi(u)$ وبالتكافؤ ، $\phi(u)$ مستمرة عند u إذا كان لكل عدد موجب ϵ يمكننا إيجاد عدد موجب δ بشرط

$$|\phi(u+\Delta u) - \phi(u)| < \epsilon \quad \text{عندما} \quad |\Delta u| < \delta$$

دالة المتجه $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ تسمى مستمرة عند u إذا كانت الدوال الثلاثه العددية $R_1(u)$, $R_2(u)$ و $R_3(u)$ مستمرة عند u أو إذا $\lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{R}(u+\Delta u) = \mathbf{R}(u)$. بالتكافؤ $\mathbf{R}(u)$ تكون مستمرة عند u إذا كان لكل عدد موجب ϵ يمكننا إيجاد عدداً موجب δ بشرط

$$|\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)| < \epsilon \quad \text{عندما} \quad |\Delta u| < \delta$$

دالة متجهة أو عددية فى u تسمى قابلة للتفاضل من الرتبة n إذا كانت مشتقاتها nth موجودة الدالة التى يمكن تفاضلها لابد أن تكون مستمرة ولكن العكس غير صحيح . مالم ينص على غير ذلك فإننا نفترض أن كل الدوال يمكن تفاضلها لأى رتبة تلزمنا فى مناقشة خاصة .

صيغة التفاضل : إذا كان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ دوال متجهة قابلة للتفاضل لكية عددية u و ϕ دالة عددية قابلة التفاضل فى u فإن

١ — $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

٢ — $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

٣ — $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

٤ — $$\frac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\mathbf{A}$$

٥ — $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

٦ — $$\frac{d}{du}\{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}) + \mathbf{A}\times(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

الرتبة فى هذه الضربيات يمكن أن تكون مهمة .

التفاضل الجزئى للمتجهات : إذا كان المتجه $\mathbf{A}$ يعتمد على أكثر من متغير عددى وليكن x, y, z مثلا . حينئذ نكتب $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y\, z)$. التفاضل الجزئى لمتجه $\mathbf{A}$ بالنسبة إلى x كالآتى

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{A}(x+\Delta x,\, y,\, z) - \mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

إذا وجدت النهايات فبالتماثل

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathbf{A}(x,\, y+\Delta y,\, z) - \mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathbf{A}(x,y,\, z+\Delta z) - \mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

هى المشتقات الجزئية للمتجه $\mathbf{A}$ بالنسبة إلى y على الترتيب لو وجدت هذه النهايات .

الملاحظات على الاستمرار وقابلية التفاضل للدوال ذات المتغير الواحد يمكن التوسع فيها لدوال ذات متغيرين أو أكثر . كمثال $\phi\ (x, y)$ تسمى مستمرة عند (x, y) إذا كان $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \phi(x+\Delta x,\, y+\Delta y) = \phi(x,y)$ أو إذا كان لكل عدد موجب $\in$ يمكننا إيجاد عدد موجب δ بحيث أن $|\phi(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - \phi(x,y)| <$ كلما $\delta > |\Delta y|$ و $\delta > |\Delta x|$ تعاريف مماثلة صحيحة للدوال المتجه

للدوال ذات متغيرين أو أكثر تستعمل العبارة قابل التفاضل لتعنى أن للدالة مشتقات جزئية أولى مستمرة (استخدم هذا التعبير بأخرين وبقليل من الإدراك الضعيف) .

يمكن تعريف المشتقات الأعلى كما فى حساب التفاضل والتكامل . لذلك كمثال

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial x\, \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}\right)$$

إذا كان $\mathbf{A}$ له تفاضل جزئى مستمر من الرتبة الثانية على الأقل إذن $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\, \partial x}$ أى أن رتبة التفاضل ليست مهمة .

قواعد التفاضل الجزئى للمتجهات تشابه تلك المستعملة فى حساب التفاضل والتكامل للدوال العددية . لذا إذا كان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوال فى x, y, z إذن كمثال .

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{B}$$ — ١

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}$$ — ٢

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\} = \frac{\partial}{\partial y}\{\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{B}\}$$ — ٣

$$= \mathbf{A}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}\cdot\mathbf{B},$$ الخ

تفاضل المتجهات : تتبع القوانين المشابهة لتلك الموجودة فى أساسيات التفاضل والتكامل كمثال :

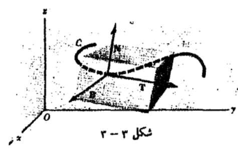
١ — إذا كانت $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, حينئذ $d\mathbf{A} = dA_1\mathbf{i} + dA_2\mathbf{j} + dA_3\mathbf{k}$

٢ — $d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

٣ — $d(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times d\mathbf{B} + d\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

٤ — إذا كانت $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$, حينئذ $d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz$ الخ

التفاضليات الهندسية : تشمل دراسة منحنيات الفراغ والأسطح . إذا كان C منحنى فراغ معرف بالدالة $\mathbf{r}(u)$ إذن فقد رأينا أن $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ هو متجه فى اتجاه المماس للمنحنى C . إذا كان العدد u قد أخذ كطول القوس s مقاساً من نقطة ثابتة على C إذن $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ هى وحدة المتجه المماس للمنحنى C ويرمز لها بالرمز $\mathbf{T}$ (شكل ٣ —٣) المعدل الذى عنده $\mathbf{T}$ تتغير بالنسبة إلى S هو مقياس الانحناء للمنحنى C ومعطى بواسطة $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$. اتجاهه $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ عند أى نقطة معينة على C يكون عمودياً على المنحنى عند تلك النقطة (مسألة ٩) . إذا كانت $\mathbf{N}$ وحدة متجه فى هذا الاتجاه العمودى ، تسمى العمود الأساسى للمنحنى إذن أنظر معادلة ٢٤ حيث κ حيث إنحناء C عند نقطة معينة . الكمية $\rho = 1/\kappa$ تسمى نصف قطر الانحناء .



شكل ٣ — ٣

وحدة المتجه $\mathbf{B}$ العمودى على المستوى $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ بحيث $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$ تسمى ثنائى التعامد للمنحنى . ويلى أن اتجاهات $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ من وضع الاتجاه الأيمن لنظام الاحداثيات المتعامدة عند أى نقطة معينة للمنحنى C . هذا النظام للاحداثيات يسمى نظام ثلاثى السطوح عند النقطة . عندما تتغير s يتحرك نظام الاحداثيات ويعرف بأنه ثلاثى سطوح متحرك .

مجموعة علاقات تتضمن مشتقات المتجهات الأساسية $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ تعرف مجتمعة أنها صيغة فرنت سيرت ومعطاه كما يلى :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

حيث τ عددى وتسمى الالتواء . الكمية $\sigma = 1/\tau$ تسمى نصف قطر الالتواء .

مستوى التام (مستوى المماس) للمنحنى عند ا النقطة P هى المستوى المحتوى المماس العمود الأساسى عند P . المستوى العمودى هو مستوى مار بالنقطة P وعمودى على المماس . المستوى الموحد هو مستوى مار بالنقطة P وعمودى على العمود الأساسى .

الميكانيكا : وتشمل دائماً دراسة حركة الأجسام على المنحنيات . وتسمى هذه الدراسة كيناتيكا أو علم الحركة المجردة . فى هذا الخصوص يمكن أن يكون لبعض نتائج التفاضلات الهندسية قيمة

دراسة القوى على الأجسام المتحركة أخذت فى الاعتبار فى الديناميكا . أساسيات هذه الدراسة هو قانون نيوتن الشهير والذى ينص على أنه إذا كانت $\mathbf{F}$ هى القوى الفعلية المؤثرة على جسم كتلته m ويتحرك بسرعة $\mathbf{v}$ إذن

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

حيث $m\mathbf{v}$ هى كمية التحرك للجسم . إذا كانت m ثابتة فإن هذا يصبح $\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$ حيث $\mathbf{a}$ هى عجلة الجسم

مسائل محلولة

١ — إذا كانت $\mathbf{R}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ حيث x, y, z هى دوال قابلة التفاضل لعدد u . أثبت أن

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k} .$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{[x(u+\Delta u)\mathbf{i} + y(u+\Delta u)\mathbf{j} + z(u+\Delta u)\mathbf{k}] - [x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}]}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}\mathbf{i} + \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}\mathbf{j} + \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u}\mathbf{k}$$

$$= \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

٢ — معطى $\mathbf{R} = \sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ أوجد (أ) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ (ب) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$
(جـ) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$ (د) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|$.

(أ) $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(t)\mathbf{k} = \cos t\ \mathbf{i} - \sin t\ \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(ب) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{i} - \frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(1)\mathbf{k} = -\sin t\ \mathbf{i} - \cos t\ \mathbf{j}$

(جـ) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

(د) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = 1$

٣ — جسم يتحرك على منحنى معادلاته البارامترية هي $x = e^{-t},\ y = 2\cos 3t,\ z = 2\sin 3t$ حيث t هو الزمن
(أ) احسب سرعته وعجلته عند أى زمن .
(ب) أوجد مقادير السرعة والعجلة عند $t = 0$.

(أ) المتجه الموضعى $\mathbf{r}$ للجسم هو . $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = e^{-t}\mathbf{i} + 2\cos 3t\ \mathbf{j} + 2\sin 3t\ \mathbf{k}$

إذن السرعة هى $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e^{-t}\mathbf{i} - 6\sin 3t\ \mathbf{j} + 6\cos 3t\ \mathbf{k}$ والعجلة هى

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e^{-t}\mathbf{i} - 18\cos 3t\ \mathbf{j} - 18\sin 3t\ \mathbf{k}$$

(ب) عندما $t = 0,\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\ ,\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i} - 18\mathbf{j}$

مقدار السرعة عندما $t = 0$ تكون $\sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{37}$

مقدار العجلة عندما $t = 0$ تكون $\sqrt{(1)^2 + (-18)^2} = \sqrt{325}$

٤ — يتحرك جسم على منحنى $x = 2t^2,\ y = t^2 - 4t,\ z = 3t - 5$, حيث t هو الزمن . أوجد مركبات السرعة والعجلة عند الزمن $t = 1$ فى الاتجاه $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

السرعة $= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2t^2\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}\right]$

$= 4t\,\mathbf{i} + (2t - 4)\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ at $t = 1$

وحدة المتجه فى الاتجاه $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ is $\frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$

إذن مركبة السرعة فى الاتجاه المعطى هو

$$\frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (-2)(-3) + (3)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

العجلة $= \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left[4t\mathbf{i} + (2t-4)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right] = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

إذن مركبة العجلة فى الاتجاه المعطى هى

$$\frac{(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (2)(-3) + (0)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{14}}{7}$$

٥ – منحنى C محدد بالمعادلات البارامترية $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$ حيث s هو طول قوس المنحنى C المقاس من نقطة ثابتة عليه إذا كان $\mathbf{r}$ متجه الموضع لأى نقطة على C بين أن $d\mathbf{r}/ds$ وحدة متجه مماس المنحنى C

المتجه $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \dfrac{d}{ds}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \dfrac{dx}{ds}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{ds}\mathbf{j} + \dfrac{dz}{ds}\mathbf{k}$ مماس للمنحنى $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$.
لتبين أن له مقدار الوحدة تلاحظ أن

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1$$

حيث $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ من حساب التفاضل والتكامل

٦ – (أ) أوجد وحدة المتجه المماس لأى نقطة على المنحنى $x = t^2+1,\ y = 4t-3,\ z = 2t^2-6t$.
(ب) حدد وحدة المماس عند النقطة حيث $t = 2$.

(أ) مماس المتجه للمنحنى عند أى نقطة هو

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + (2t^2-6t)\mathbf{k}\right] = 2t\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}$$

مقدار المتجه هو $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}$

إذن وحدة المتجه المماس المطلوبة هى $\mathbf{T} = \dfrac{2t\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}}$

تذكر أنه حيث $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ ، $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

(ب) عند $t = 2$ وحدة المتجه المماس تكون $\mathbf{T} = \dfrac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \dfrac{2}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}\mathbf{j} + \dfrac{1}{3}\mathbf{k}$

٧ – إذا كان $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ دوال قابلة للتفاضل للعدد u أثبت

(أ) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$ (ب) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

(أ)

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\ \mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

طريقة أخرى :

لتكن $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ حينئذ

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

(ب)

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\times(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\ \mathbf{A}\times\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\Delta\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

طريقة أخرى :

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d}{du}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

باستعمال نظرية التفاضل المحدد . هذا يصبح

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ \frac{dB_1}{du} & \frac{dB_2}{du} & \frac{dB_3}{du}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{dA_1}{du} & \frac{dA_2}{du} & \frac{dA_3}{du}\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

٨ ــ إذا كان $\mathbf{A} = 5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$ أوجد

(أ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ (ب) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ (جـ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})$

(أ)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$$

$$= (5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\cdot(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) + (10t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k})\cdot(\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j})$$

$$= 5t^2\cos t + t\sin t + 10t\sin t - \cos t = (5t^2-1)\cos t + 11t\sin t$$

طريقة أخرى : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5t^2\sin t - t\cos t$. حينئذ

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(5t^2\sin t - t\cos t) = 5t^2\cos t + 10t\sin t + t\sin t - \cos t$$

$$= (5t^2-1)\cos t + 11t\sin t$$

(ب)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5t^2 & t & -t^3\\ \cos t & \sin t & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 10t & 1 & -3t^2\\ \sin t & -\cos t & 0\end{vmatrix}$$

$$= [t^3 \sin t\, \mathbf{i} - t^3 \cos t\, \mathbf{j} + (5t^2 \sin t - t \cos t)\mathbf{k}]$$
$$+ [-3t^2 \cos t\, \mathbf{i} - 3t^2 \sin t\, \mathbf{j} + (-10t \cos t - \sin t)\mathbf{k}]$$
$$= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\mathbf{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\mathbf{j} + (5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t)\mathbf{k}$$

طريقة أخرى :

حينئذ

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -t^3 \cos t\, \mathbf{i} - t^3 \sin t\, \mathbf{j} + (-5t^2 \cos t - t \sin t)\mathbf{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\mathbf{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\mathbf{j} + (5t^2 \sin t - 11t \cos t - \sin t)\mathbf{k}$$

(جـ)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$
$$= 2(5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\cdot(10t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}) = 100t^3 + 2t + 6t^5$$

طريقة أخرى

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (5t^2)^2 + (t)^2 + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6$$

حينئذ

$$\frac{d}{dt}(25t^4 + t^2 + t^6) = 100t^3 + 2t + 6t^5.$$

٩ ــ إذا كان $\mathbf{A}$ ذا مقدار ثابت بين أن $\mathbf{A}$ و $d\mathbf{A}/dt$ يكونان متعامدين بفرض $|d\mathbf{A}/dt| \neq 0$.

حيث $\mathbf{A}$ لها مقدار ثابت $\mathbf{A}.\mathbf{A} = \text{constant}$.

حينئذ

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

لذلك $\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ و $\mathbf{A}$ يكون عمودياً على $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ باعتبار $|\frac{d\mathbf{A}}{dt}| \neq 0$.

١٠ ــ أثبت $\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ حيث $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ دوال قابلة للتفاضل للعدد u من المسائل (أ) و (ب)

$$\frac{d}{du}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d}{du}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right] + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

١١ ــ أحسب

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right)$$

من المسألة (١٠)

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right) = \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + \mathbf{V}\cdot\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{V}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}$$

$$= \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + 0 + 0 = \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3}$$

١٢ - جسم يتحرك بحيث أن المتجه الموضعى له يعطى بالمعادله $\mathbf{r} = \cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}$ حيث ω ثابت بين أن

(أ) السرعة $\mathbf{v}$ للجسم عمودية على $\mathbf{r}$ (ب) العجلة $\mathbf{a}$ متجهة نحو الأصل ولها مقدار يتناسب مع المسافة من الأصل

(ﺟ) $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ تساوى متجهاً ثابتاً .

(أ) $$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

حينئذ

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = [\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}]\cdot[-\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}]$$

$$= (\cos\omega t)(-\omega\sin\omega t) + (\sin\omega t)(\omega\cos\omega t) = 0$$

و $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان

(ب) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

$$= -\omega^2[\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}] = -\omega^2\mathbf{r}$$

حينئذ تكون العجلة عكس اتجاه $\mathbf{r}$ أى أنها متجهة نحو الأصل . ومقدارها يتناسب مع $|\mathbf{r}|$ والتى هى المسافة من نقطة الأصل .

(ﺟ) $$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = [\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}]\times[-\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\mathbf{k} = \omega\mathbf{k}, \text{ a constant vector.}$$

فيزيائيا الحركة لهذا الجسم المتحرك على محيط دائرة بسرعة زاوية ثابتة ω . العجلة متجه نحو مركز الدائرة وتكون هى عجلة الجذب المركزى (العجلة الحافظة المركزية) .

١٣ - برهن $$\mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}\right)$$

$$= \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B}\right] = \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B}$$

١٤ – بين أن

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

ليكــن

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}. \quad \text{إذن} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{-1/2}\left(2A_1\frac{dA_1}{dt} + 2A_2\frac{dA_2}{dt} + 2A_3\frac{dA_3}{dt}\right)$$

$$= \frac{A_1\frac{dA_1}{dt} + A_2\frac{dA_2}{dt} + A_3\frac{dA_3}{dt}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}}{A}, \quad \text{i.e.} \quad A\frac{dA}{dt} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

طريقة أخرى :

حيث

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \frac{d}{dt}(A^2).$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}(A^2) = 2A\frac{dA}{dt}$$

حينئذ

$$2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2A\frac{dA}{dt} \quad \text{or} \quad \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

تذكر أنه إذا كانت $\mathbf{A}$ متجها ثابتا $\mathbf{A}.d\mathbf{A}/dt = 0$ كما فى المسألة ٩

١٥ – إذا كان

$$\mathbf{A} = (2x^2y - x^4)\mathbf{i} + (e^{xy} - y\sin x)\mathbf{j} + (x^2\cos y)\mathbf{k}$$

أوجــد

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} - y\sin x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y)\mathbf{k}$$

$$= (4xy - 4x^3)\mathbf{i} + (ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + 2x\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} - y\sin x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y)\mathbf{k}$$

$$= 2x^2\mathbf{i} + (xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - x^2\sin y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(2x\cos y)\mathbf{k}$$

$$= (4y - 12x^2)\mathbf{i} + (y^2e^{xy} + y\sin x)\mathbf{j} + 2\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial y}(x^2\sin y)\mathbf{k}$$

$$= 0 + x^2e^{xy}\,\mathbf{j} - x^2\cos y\,\mathbf{k} = x^2e^{xy}\,\mathbf{j} - x^2\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial x}(x^2\sin y)\mathbf{k}$$

$$= 4x\,\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x\sin y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y)\mathbf{k}$$

$$= 4x\,\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x\sin y\,\mathbf{k}$$

تذكر أن $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y}$ أى أن رتبة التفاضل غير ذات موضوع هذا عموما صحيح إذا كان التفاضل الجزئى من الرتبة الثانية مستمر للمتجه $\mathbf{A}$ على الأقل

١٦ ــ إذا كان $\phi(x,y,z) = xy^2z$ ، $\mathbf{A} = xz\,\mathbf{i} - xy^2\,\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ أوجد $\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}(\phi\mathbf{A})$ عند النقطة $(2, -1, 1)$

$$\phi\mathbf{A} = (xy^2z)(xz\,\mathbf{i} - xy^2\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}) = x^2y^2z^2\,\mathbf{i} - x^2y^4z\,\mathbf{j} + xy^3z^3\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z^2\,\mathbf{i} - x^2y^4z\,\mathbf{j} + xy^3z^3\,\mathbf{k}) = 2x^2y^2z\,\mathbf{i} - x^2y^4\,\mathbf{j} + 3xy^3z^2\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2z\,\mathbf{i} - x^2y^4\,\mathbf{j} + 3xy^3z^2\,\mathbf{k}) = 4xy^2z\,\mathbf{i} - 2xy^4\,\mathbf{j} + 3y^3z^2\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^2z\,\mathbf{i} - 2xy^4\,\mathbf{j} + 3y^3z^2\,\mathbf{k}) = 4y^2z\,\mathbf{i} - 2y^4\,\mathbf{j}$$

إذا كانت $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$ هذا يصبح $4(-1)^2(1)\mathbf{i} - 2(-1)^4\,\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

١٧ ــ ليكن $\mathbf{F}$ معتمدا على x, y, z, t حيث x, y, z تعتمد على t . أثبت أن

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

تحت افتراض ملائم لقابلية التفاضل

$$\mathbf{F} = F_1(x,y,z,t)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z,t)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z,t)\,\mathbf{k}$$

إذن

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dF_1\,\mathbf{i} + dF_2\,\mathbf{j} + dF_3\,\mathbf{k} \\ &= \left[\frac{\partial F_1}{\partial t}dt + \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t}dt + \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial F_3}{\partial t}dt + \frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz\right]\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\mathbf{k}\right)dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)dz \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}dt + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}dz \end{aligned}$$

لذلك

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

التفاضل الهندسي :

١٨ – برهن صيغة فرنت – سيرت (أ) $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ ، (ب) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$ ، (جـ) $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$.

(أ) حيث $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ ومن مسألة ٩ أن $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/ds = 0$ أى أن $d\mathbf{T}/ds$ عموديا على $\mathbf{T}$.

إذا كانت $\mathbf{N}$ وحدة متجه فى اتجاه $d\mathbf{T}/ds$ إذن $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$. تسمى $\mathbf{N}$ العمود الأساسى الانحناء $\rho = 1/\kappa$ نصف قطر الانحناء .

(ب) ليكن $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$ بحيث أن $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \kappa\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$

إذن $\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$ بحيث تكون $\mathbf{T}$ عمودية على $d\mathbf{B}/ds$.

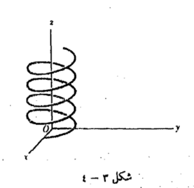
لكن من $\mathbf{B}.\mathbf{B} = 1$ يستتبع أن $\mathbf{B}.\,d\mathbf{B}/ds$ (مسألة ٩) بحيث أن $d\mathbf{B}/ds$ تكون عمودية على $\mathbf{B}$ وذلك فى المستوى $\mathbf{T}.\ \mathbf{N}$

وبما أن $d\mathbf{B}/ds$ موجودة فى المستوى المحتوى على كل من $\mathbf{N}, \mathbf{T}$ وعمودى على $\mathbf{T}$ فلا بد أن يكون موازيا- للمتجه $\mathbf{N}$ إذن $ds/d\mathbf{B} = -\tau\,\mathbf{N}$ وتسمى $\mathbf{B}$ ثنائى التعامد τ الالتواء $1/\tau$ $\sigma = 1/\tau$ نصف قطر الالتواء

(جـ) حيث $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ تكون منظومة يمنى وكذلك $\mathbf{T}\ \mathbf{B}\ \mathbf{N},$ أى أن $\mathbf{N} = \mathbf{B}\,\mathbf{T}$

حينئذ $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds}\times\mathbf{T} = \mathbf{B}\times\kappa\mathbf{N} - \tau\mathbf{N}\times\mathbf{T} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$

١٩ ـ خطط منحنى الفراغ $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t$ ثم أوجد (ا) وحدة الأساس $\mathbf{T}$ (ب) العمود الأساسي $\mathbf{N}$ والانحناء K ونصف قطر الانحناء ρ (جـ) ثنائي التعامد $\mathbf{B}$ والالتواء τ ونصف قطر الالتواء σ .



شكل ٣ ـ ٤

منحنى الفراغ عبارة عن لولب دائرى (شكل ٣-٤) حيث $t = z/4$ والمنحنى له المعادلات $x = 3\cos(z/4)$ $y = 3\sin(z/4)$ وبالتالى فإنها تقع على الأسطوانة $x^2 + y^2 = 9$.

(ا) متجه الموضع لأى نقطة على المنحنى هــو

$$\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

إذن
$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} = 5$$

وبالتالى
$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$$

(ب)
$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}\right) = -\frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{25}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{3}{25}\sin t\,\mathbf{j}$$

حيث
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N},\quad \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = |\kappa|\,|\mathbf{N}| = \kappa \quad \text{as } \kappa \geqq 0$$

إذن
$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\cos t\right)^2 + \left(-\frac{3}{25}\sin t\right)^2} = \frac{3}{25} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3}$$

من $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ يمكن الحصول على
$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}\ .$$

(جـ)

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}\sin t\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\sin t\,\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4}{25}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{25}\sin t\,\mathbf{j}$$

$$-\tau\mathbf{N} = -\tau(-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}) = \frac{4}{25}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{25}\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{or} \quad \tau = \frac{4}{25} \quad \text{and} \quad \sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$$

٢٠ – أثبت أن نصف قطر الانحناء لمنحنى بالمعادلات البارمترية $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$ يعطى المعادلة

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

المتجه الموضعي لأي نقطة على المنحنى هـو $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$

إذن $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$ و $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}$

ولكن $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ حتى يكون $\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$

والنتيجة تأتي حيث $\rho = 1/\kappa$

٢١ – بين أن $\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{\tau}{\rho^2}$.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \kappa\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa(\tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}) + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \mathbf{T}\cdot\kappa\mathbf{N}\times\left(\kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}\right)$$

$$= \mathbf{T}\cdot\left(\kappa^2\tau\,\mathbf{N}\times\mathbf{B} - \kappa^3\mathbf{N}\times\mathbf{T} + \kappa\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}\times\mathbf{N}\right) = \mathbf{T}\cdot(\kappa^2\tau\,\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{B}) = \kappa^2\tau = \frac{\tau}{\rho^2}$$

يمكن كتابة النتيجة كما يلي

$$\tau = \left[(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2\right]^{-1}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

حيث أن الشرط فوق الحروف تبين المشتقات بالنسبة إلى s وباستخدام نتيجة المسألة ٢٠

٢٢ – أعطيت منحنى الفراغ $x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3$ أوجـد (أ) الانحناء κ (ب) الالتـواء.

(أ) المتجه الموضعي هـو $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$

إذن $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t^2\,\mathbf{k}$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 1 + 2t^2$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t^2\,\mathbf{k}}{1 + 2t^2}\,,$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{(1 + 2t^2)(2\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t^2\,\mathbf{k})(4t)}{(1 + 2t^2)^2} = \frac{-4t\,\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}$$

إذن $$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-4t\,\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^3}$$

حيث $$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}\,, \quad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{(-4t)^2 + (2-4t^2)^2 + (4t)^2}}{(1 + 2t^2)^3} = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$$

(ب) من (١) $$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{-2t\,\mathbf{i} + (1 - 2t^2)\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

إذن $$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{1 + 2t^2} & \frac{2t}{1 + 2t^2} & \frac{2t^2}{1 + 2t^2} \\ \frac{-2t}{1 + 2t^2} & \frac{1 - 2t^2}{1 + 2t^2} & \frac{2t}{1 + 2t^2} \end{vmatrix} = \frac{2t^2\,\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

والآن $$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4t\,\mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}\,, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4t\,\mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^3}$$

أيضاً $-\tau\mathbf{N} = -\tau\left[\frac{-2t\,\mathbf{i} + (1 - 2t^2)\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}}{1 + 2t^2}\right]$ حيث $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$ نجد $\tau = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$

يلاحظ أن $\kappa = \tau$ لهذا المنحنى

٢٣ — أوجد معادلات في صيغة المتجه وثلاثى الأبعاد للآتى : (أ) المماس (ب) العمود الأساسى (ا) ثنائى التعامد لمنحنى مسألة ٢٢ عند النقطة التى عندها $t = 1$.

ليكن المتجهات $\mathbf{B}_o, \mathbf{T}_o, \mathbf{N}_o$ تمثل المماس والعمود الأساسى وثنائى التعامد عند النقطة المطلوبة .

إذن من مسألة ٢٢

$$\mathbf{T}_o = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}\,, \quad \mathbf{N}_o = \frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}\,, \quad \mathbf{B}_o = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

إذا كان $\mathbf{A}$ هو متجه معطى بينما $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ تبين على الترتيب المتجهات الوضعية لنقطة البداية ولأى نقطة اختيارية على $\mathbf{A}$ وحينئذ $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ تكون موازية للمتجه $\mathbf{A}$ وبالتالى فإن معادلة المتجه $\mathbf{A}$ تكون $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{A} = 0$

إذن : معادلة المماس هى $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{T}_0 = 0$

معادلة العمود الأساسى $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{N}_0 = 0$

معادلة ثنائى التعامد $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}_0 = 0$

فى الثلاثة أبعاد $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ وهذه تصبح على الترتيب

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2/3}{2},\quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2/3}{2},\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2/3}{1}$$

يمكن كتابة هذه المعادلات أيضا فى الصيغة البارامترية (مسألة ٢٨ الفصل الأول) .

٢٤ – أوجد المعادلات فى الصيغة المتجهة وثلاثية الأبعاد لكل من (أ) مستوى التام (المستوى المماس) (ب) المستوى العمودى (جـ) المستوى الموحد للمنحنى الذى فى المسائل (٢٢ ، ٢٣) عند النقطة حيث $t = 1$.

(أ) مستوى التام هو المستوى المحتوى على المماس والعمود الأساسى . إذا كان $\mathbf{r}$ هو متجه الموضع لأى نقط فى هذا المستوى و $\mathbf{r}_0$ هو متجه الموضع للنقطة $t = 1$. إذن $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ يكون عموديا على $\mathbf{B}_0$ ثنائى التعامد عند النقطة $t = 1$ أى أن $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_0 = 0$.

(ب) المستوى العمودى هو المستوى العمودى على متجه المماس عند نقطة معلومة إذن المعادلة المطلوبة هى $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{T}_0 = 0$.

(جـ) المستوى الموحد هو المستوى العمودى على العمود الأساسى عند نقطة معلومة . المعادلة المطلوبة هى $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_0 = 0$.

المعادلات (أ) ، (ب) ، (جـ) فى الصيغة ثلاثية الأبعاد تصبح على الترتيب .

$$2(x-1) - 2(y-1) + 1(z-2/3) = 0$$
$$1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2/3) = 0$$
$$-2(x-1) - 1(y-1) + 2(z-2/3) = 0$$



شكل ٣ – ٥

شكل ٣ – ٥ يوضح مستوى التام والمستوى العمودى والمستوى الموحد للمنحنى C عند النقطة ١

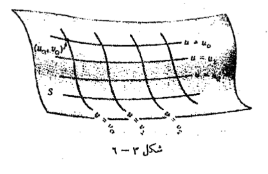
٢٥ – (أ) بين أن المعادلة $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ تمثل سطحا

(ب) بين أن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ تمثل متجها عموديا للسطح

(جـ) أوجد الوحدة العمودية للسطح الآتى حيث $a > 0$

$$\mathbf{r} = a\cos u \sin v\ \mathbf{i} + a\sin u \sin v\ \mathbf{j} + a\cos v\ \mathbf{k}$$

(ا) إذا فرض أن u لها قيمة ثابته ولتكن u_0 إذن $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ تمثل منحنى الذى يعرف بالمعادله $u = u_0$. بالمثل $u = u_1$ تعرف منحنى آخر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, v)$ عندما تتغير u عندئذ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ تمثل منحنى يتحرك فى الفراغ ويولد سطح S . إذن $\mathbf{r} = r(u, v)$ تمثل السطح المتولد شكل ٣ – ٦

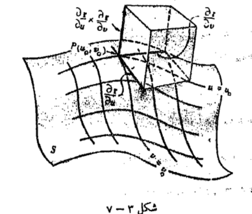


شكل ٣ – ٦

المنحنيات ...... و $u = u_0, u = u_1$ تمثل منحنيات محددة على السطح بالمثل . . $v = v_1$ و $v = v_0$ تمثل منحنيات على السطح .

بتحديد قيمه معينه لكل من (u, v) نحصل على نقطة على السطح . وبالتالى المنحنيات $v = v_0$ و $u = u_0$ على سبيل المثال تتقاطع وتحدد النقطة (u_0, v_0) على السطح . نحن نتكلم عن زوج اعداد . (u, v) كتعريف لإحداثيات منحنى الأضلاع على السطح . إذا كانت كل المنحنيات u = ثابت ، v = ثابت متعامدة عند كل نقط التقاطع فيقال أن منظومة أحداثيات منحنى الإضلاع متعامدة .

(ب) اعتبر نقطة P لها الأحداثيات (u_0, v_0) على السطح S كما هو مبين بشكل ٣ – ٧ المتجه $\partial \mathbf{r}/\partial u$ عند P يمكن الحصول عليه بتفاضل $\mathbf{r}$ بالنسبة إلى u مع الاحتفاظ v = ثابت = v_0 من نظرية منحنى الفراغ نجد أن $\partial \mathbf{r}/\partial \mathbf{r}$ عند P تمثل متجه المماس للمنحنى $v = u$ عند P



شكل ٣ – ٧

(شكل ٣ – ٧) بالمثل $\partial \mathbf{r}/\partial v$ عند P تمثل متجه المماس المنحنى u_0 = ثابت = u حيث dr/dv $\partial \mathbf{r}/\partial u$ تمثل المتجهات عند P مماسة للمنحنيات الواقعة على السطح S عند P و بالتالى فإن هذه المتجهات تكون مماسة للسطح عند P و بالتالى يستنتج أن $dv/du \times dr/dv$ يكون هو المتجه العمودى على السطح S عند P

(جـ)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a\sin u \sin v\ \mathbf{i} + a\cos u \sin v\ \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a\cos u \cos v\ \mathbf{i} + a\sin u \cos v\ \mathbf{j} - a\sin v\ \mathbf{k}$$

إذن

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u \sin v & a \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \sin u \cos v & -a \sin v \end{vmatrix}$$

$$= -a^2 \cos u \sin^2 v \ \mathbf{i} - a^2 \sin u \sin^2 v \ \mathbf{j} - a^2 \sin v \cos v \ \mathbf{k}$$

تمثل متجهاً عمودياً على السطح عند أى نقطة (u, v)

وحدة المتجه العمودى يمكن الحصول عليها بقسم $dr/du \times dr/dv$ بمقدارها $dr/dn \times dr/dv$ المعطى بالمعادلة

$$\sqrt{a^4 \cos^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4 (\cos^2 u + \sin^2 u) \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4 \sin^2 v (\sin^2 v + \cos^2 v)} = \begin{cases} a^2 \sin v & \text{if} \ \sin v > 0 \\ -a^2 \sin v & \text{if} \ \sin v < 0 \end{cases}$$

إذن يوجد وحدتان عموديتان معطيتان

$$\pm (\cos u \sin v \ \mathbf{i} + \sin u \sin v \ \mathbf{j} + \cos v \ \mathbf{k}) = \pm \mathbf{n}$$

يجب أن يلاحظ أن السطح المعطى معرف بالمعادلة $x = a \cos u \sin v, \ y = a \sin u \sin v, \ z = a \cos v$ التى فيها نرى أن $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ والتى تمثل معادلة كرة نصف قطرها a حيث $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$ ومنها نجد أن

$$\mathbf{n} = \cos u \sin v \ \mathbf{i} + \sin u \sin v \ \mathbf{j} + \cos v \ \mathbf{k}$$

هى وحدة المتجه العمودى المرسوم الخارج لكرة عند النقطة (u, v)

٢٦ – أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $z = x^2 + y^2$ عند النقطة $(1, -1, 2)$.

وليكن $x = u, y = v, z = u^2 + v^2$ هى معادلات بارامترية السطح . متجه الموضع لأى نقطة على السطح هو

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2+v^2)\mathbf{k}$$

إذن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ عند النقطة $(1, -1, 2)$ حيث $u = 1$ و $v = -1$

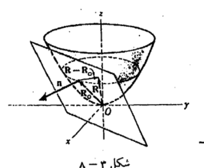
مسألة ٢٥ المتجه العمودى $\mathbf{n}$ على السطح عند هذه النقطة هو

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

متجه الموضع للنقطة $(1,-1,2)$ هو $\mathbf{R}_o = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

متجه الموضع لأى نقطة على المستوى هو

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



شكل ٣ — ٨

إذن من (شكل ٣ – ٨) $\mathbf{R} - \mathbf{R}_o$ تكون عمودية على $\mathbf{n}$

وتكون المعادلة المطلوبة للمستوى هى $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{n} = 0$

أو $[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] \cdot [-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}] = 0$

أى أن $-2(x-1) + 2(y+1) + (z-2) = 0 \quad \text{or} \quad 2x - 2y - z = 2$

ميكانيكا :

٢٧ – بين أن العجلة $\mathbf{a}$ لجسم يتحرك على منحنى فراغى بسرعة $\mathbf{v}$ يعطى بالمعادلة

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

حيث $\mathbf{T}$ هى وحدة متجه المماس لمنحنى الفراغ و $\mathbf{N}$ هى وحدة المتجه العمود الأساسى لهذا المنحنى و ρ هو نصف قطر الانحناء . السرعة $\mathbf{v}$ = قيمة v مضروب فى وحدة متجه المماس $\mathbf{T}$

أو $\mathbf{v} = v\,\mathbf{T}$

بالتفاضل $\quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$

ولكن من (مسألة ١٨ – أ) $\quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{\rho}$

إذن $\quad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{\rho}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$

هذا يبين أن مركبة العجلة dv/dt تكون فى اتجاه المماس للطريق و v^2/ρ فى اتجاه العمود الأساسى للطريق . وهذه العجلة تسمى العجلة الحافظة المركزية كحالة خاصة من هذه المسألة أنظر المسألة ١٢ .

٢٨ – إذا كان $\mathbf{r}$ هو متجه الموضع لجسم كتلة m بالنسبة إلى نقطة O و $\mathbf{F}$ هى القوة الخارجية على الجسم إذن $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ هو عزم القوة $\mathbf{F}$ حول O بين أن $\mathbf{M} = d\mathbf{H}/dt$ حيث $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}$ هى سرعة الجسم .

قانون نيوتن $\quad \mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$

ولكن $\quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}$

$$= \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times m\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{0}$$

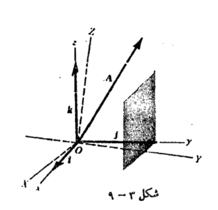
أى أن $\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$

يلاحظ أن النتيجة صحيحة سواء كانت m ثابتة أم لا . تسمى $\mathbf{H}$ العزم الزاوى . النتيجة .

تبين أن العزم يساوى معدل تغير كمية التحرك الزاوى .

هذه النتيجة من السهل التوسع فيها لتشمل نظام يحتوى على n من الأجسام لها الكتل $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ولها متجهات موضعية $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ وقوى خارجية $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ ولهذه الحالة $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$. وهذه هى كمية التحرك الزاوية الكلية $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$ هو العزم الكلى والنتيجة هى $\mathbf{M} = d\mathbf{H}/dt$ كما حصلنا عليها سابقاً .

٢٩ — مشاهد واقف عند نقطة ثابتة بالنسبة لنظام الأحداثيات x, y, z الذى له نقطة أصل O كما فى شكل ٣ — ٩ لاحظ المتجه $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. إحسب مشتقته بالنسبة الزمن ولتكن $\frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$ أخيراً وجد أنه هو ونظام أحداثياته يدوران فعلياً بالنسبة إلى نظام الأحداثيات XYZ المعتبرة ثابتاً فى الفراغ والذى له نقطة أصل عند O .



شكل ٣ — ٩

فسأل ما هى المشتقة بالنسبة للزمن للمتجه $\mathbf{A}$ للملاحظ الثابت لنظام الأحداثيات XYZ ؟

(أ) إذا كان $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m$ و $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f$ تعرف على الترتيب المشتقات الزمنية للمتجه $\mathbf{A}$ بالنسبة لنظام ثابت ونظام متحرك . بين أنه توجد كمية متجهة بحيث أن

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}$$

(ب) ليكن D_m و D_f رمزين لعامل المشتقات الزمنية فى نظام ثابت ومتحرك على الترتيب . أثبت العامل المكافىء .

$$D_f = D_m + \boldsymbol{\omega}\times$$

(أ) المشاهد الثابت وحدة المتجهات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ تتغير فعلياً مع الزمن بالتالى فإن هذا الملاحظ لابد له من حساب المشتقة الزمنية للمتجه $\mathbf{A}$

أى أن
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \qquad (١)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\bigg|_f = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\bigg|_m + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \qquad (٢)$$

حيث $\mathbf{i}$ هى وحدة متجه و $d\mathbf{i}/dt$ عمودية على $\mathbf{i}$ (مسألة ٩) ولابد أن تقع فى المستوى $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ إذن

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k} \qquad (٣)$$

بالمثل

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i} \qquad (٤)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j} \qquad (٥)$$

من $\mathbf{i}.\mathbf{j} = 0$ يؤدى التفاضل إلى $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0$ ولكن $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_4$ من (٤) و $\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \alpha_1$

من (٣) إذن $\alpha_4 = -\alpha_1$

بالمثل من $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0,\ \mathbf{j}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$ من $\alpha_5 = -\alpha_2;$ و $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0,\ \mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$

و $\alpha_6 = -\alpha_3$

إذن $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k},\quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} - \alpha_1\mathbf{i},\quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\alpha_2\mathbf{i} - \alpha_3\mathbf{j}$

$$A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_1A_2 - \alpha_2A_3)\mathbf{i} + (\alpha_1A_1 - \alpha_3A_3)\mathbf{j} + (\alpha_2A_1 + \alpha_3A_2)\mathbf{k}$$

التى يمكن كتابتها فى الصورة

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

إذا اخترنا $\alpha_3 = \omega_1,\ -\alpha_2 = \omega_2,\ \alpha_1 = \omega_3$ يصبح المحدد

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}$$

حيث $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$. الكمية $\boldsymbol{\omega}$ هى متجه السرعة الزاوية للنظام المتحرك بالنسبة لنظام ثابت

(ب) بالتعريف

$D_f\mathbf{A} = \left.\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f$ = المشتقة فى نظام ثابت

$D_m\mathbf{A} = \left.\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m$ = المشتقة فى نظام متحرك

من (أ)

$$D_f\mathbf{A} = D_m\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} = (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{A}$$

وهذا يبين تكافوء العاملين المؤثرين $Df \equiv Dm + \boldsymbol{\omega} \times$

٣٠ – أوجد (أ) السرعة (ب) العجلة لجسم متحرك كما يراه اثنان من المشاهدين فى المسألة ٢٩

(أ) ليكن المتجه $\mathbf{A}$ فى المسألة ٢٩ هو متجه الموضع $\mathbf{r}$ لجسم باستخدام رمز العامل المؤثر كما فى (المسألة ٢٩ – ب) وليكن

$$D_f\mathbf{r} = (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{r} = D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (١)$$

لكن

$D_f\mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|f}$ = سرعة الجسم بالنسبة لنظام ثابت

$D_m\mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|m}$ = سرعة الجسم بالنسبة لنظام متحرك

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \mathbf{v}_{m|f}$ = سرعة النظام المتحرك بالنسبة لنظام ثابت

إذن (١) يمكن أن تكتب على هيئة

$$\mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (٢)$$

أو باستخدام العلامات المقترحة ؟

$$\mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \mathbf{v}_{m|f} \qquad (٣)$$

يلاحظ أن دوران الملاحظين الثابت والمتحرك يمكن أن يتبادلا وبالتالى الملاحظ الثابت يمكن أن يفكر فى نفسه كتحرك بالنسبة إلى الآخر . فى هذه الحالة لابد من تغير الرموز السفلية f, m وأيضاً تغير $\boldsymbol{\omega}$ الى $-\boldsymbol{\omega}$

حيث أن الدوران النسبى قد عكس . إذا حصل هذا تصبح المعادلة (٢) :

$$\mathbf{v}_{p|m} = \mathbf{v}_{p|f} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

هذه النتيجة صحيحة لكل ملاحظ (مشاهد) .

(ب) عجلة الجسم كما حددها المشاهد الثابت عند O هى $D_f^2\mathbf{r} = D_f(D_f\mathbf{r})$. خذ D_f فى كلا الجانبين للمعادلة (١) واستخدم العامل المؤثر المكافوء الذى وجد فى (المسألة ٢٩ – ب) إذن

$$\begin{aligned} D_f(D_f \mathbf{r}) &= D_f(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= D_m(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= D_m^2 \mathbf{r} + D_m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \end{aligned}$$

أو

$$D_f^2 \mathbf{r} = D_m^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times D_m \mathbf{r} + (D_m \boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

ليكن $\mathbf{a}_{p|f} = D_f^2 \mathbf{r}$ تساوى عجلة الجسم بالنسبة لنظام ثابت

$\mathbf{a}_{p|m} = D_m^2 \mathbf{r}$ تساوى عجلة الجسم بالنسبة لنظام متحرك

إذن

$$\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega}\times D_m \mathbf{r} + (D_m \boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

تساوى عجلة النظام المتحرك بالنسبة للنظام الثابت .

ونستطيع أن نكتب

$$\mathbf{a}_{p|f} = \mathbf{a}_{p|m} + \mathbf{a}_{m|f}$$

لحالات كثيرة مهمة $\boldsymbol{\omega}$ هى متجه ثابت . أى أن الدوران يتتابع بسرعة زاوية ثابتة . إذن $D_m \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

و $\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega}\times D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$

الكمية $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_m$ تسمى عجلة كوريلز . وتسمى $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ العجلة الحافظة المركزية .

قانون نيوتن صالح فقط فى نظم القصور الذاتى أى أن النظم الثابتة أو التى تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لنظام ثابت . الأرض ليست بالضبط نظام قصور ذاتى وهذا يحسب نتيجة لوجود افتراض « يخالف الواقع » قوى ذاتية (كوريلز ... وإلخ) التى لابد أن تؤخذ فى الاعتبار . إذا كانت كتلة الجسم ثابتة M إذن قانون نيوتن الثانى يصبح

$$M D_m^2 \mathbf{r} = \mathbf{F} - 2M(\boldsymbol{\omega}\times D_m \mathbf{r}) - M[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})] \qquad (٤)$$

حيث D_m ترمز لكمية d/dt كما حسبت بواسطة المشاهد على الأرض والقوة $\mathbf{F}$ هى محصلة كل القوى الحقيقية كما قيست بالمشاهد .

آخر كميتين فى الطرف الأيمن (٤) يمكن إهمالها فى معظم الحالات ولا يستخدموا فى الحياة العملية .

النظرية النسبية لأينشتين عدلت أو غيرت تغييراً جذرياً لمفهوم الحركة المطلقة التى هى مفهوم متضمن بمبدأ نيوتن وأدت إلى مراجعة قوانين نيوتن .

مسائل متنوعة

٣١ — إذا كان $\mathbf{R} = e^{-t}\mathbf{i} + \ln(t^2+1)\mathbf{j} - \tan t\,\mathbf{k}$ أوجد (أ) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ (ب) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|$ (جـ) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$ (د) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ عندما $t=0$

الإجابة : (أ) $-\mathbf{i}-\mathbf{k}$, (ب) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, (جـ) $\sqrt{2}$, (د) $\sqrt{5}$

٣٢ — أوجد السرعة والعجلة لجسم يتحرك على طول المنحنى $x = 2\sin 3t,\ y = 2\cos 3t,\ z = 8t$ عند أي زمن $t>0$
أوجد مقدار السرعة والعجلة :

الإجابة :

$$\mathbf{v} = 6\cos 3t\,\mathbf{i} - 6\sin 3t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k},\quad \mathbf{a} = -18\sin 3t\,\mathbf{i} - 18\cos 3t\,\mathbf{j},\quad |\mathbf{v}| = 10,\quad |\mathbf{a}| = 18$$

٣٣ — أوجد وحدة متجه المماس لأي نقطة على المنحنى $x = a\cos\omega t,\ y = a\sin\omega t,\ z = bt$ حيث a, b, ω هي ثوابت

الإجابة :

$$\frac{-a\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}$$

٣٤ — إذا كان $\mathbf{A} = t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (2t+1)\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = (2t-3)\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$ أوجد

(أ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ (ب) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ (جـ) $\frac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ (د) $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)$ at $t=1$

الإجابة : (أ) -6 (ب) $7\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ (جـ) 1
(د) $\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

٣٥ — إذا كان $\mathbf{C} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = \sin u\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j} + u\mathbf{k},\ \mathbf{B} = \cos u\,\mathbf{i} - \sin u\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

أوجد $\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))$ at $u=0$

الإجابة : $7\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

٣٦ — أوجد $\frac{d}{ds}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot\mathbf{B}\right)$ إذا كان A, و B تكون دوال تفاضلية في S

الجواب $\mathbf{A}\cdot\frac{d^2\mathbf{B}}{ds^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}\cdot\mathbf{B}$

٣٧ — إذا كان $\mathbf{B}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j} - 3\cos t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{A}(t) = 3t^2\mathbf{i} - (t+4)\mathbf{j} + (t^2-2t)\mathbf{k}$ أوجد $\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ at $t=0$.

الإجابة : $-30\mathbf{i}+14\mathbf{j}+20\mathbf{k}$

٣٨ – إذا كان $\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = 6t\,\mathbf{i} - 24t^2\,\mathbf{j} + 4\sin t\,\mathbf{k}$ أوجد $\mathbf{A}$ المعطى بالمعادلة $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ at $t = 0$ و $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ الإجابة : $\mathbf{A} = (t^3 - t + 2)\mathbf{i} + (1 - 2t^4)\mathbf{j} + (t - 4\sin t)\mathbf{k}$

٣٩ – بين أن $\mathbf{r} = e^{-t}(\mathbf{C}_1 \cos 2t + \mathbf{C}_2 \sin 2t)$ حيث $\mathbf{C}_1$ $\mathbf{C}_2$ متجهات ثابتة . هل تكون حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 5\mathbf{r} = 0$$

٤٠ – بين أن الحل العام للمعادلة التفاضلية هى $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega^2\mathbf{r} = 0$ حيث ω و α كميات ثابتة تكون

(أ) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1 e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t} + \mathbf{C}_2 e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t})$ if $\alpha^2 - \omega^2 > 0$

(ب) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1 \sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t + \mathbf{C}_2 \cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t)$ if $\alpha^2 - \omega^2 < 0$

(جـ) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$ if $\alpha^2 - \omega^2 = 0$,

حيث $\mathbf{C}_1$ و $\mathbf{C}_2$ كميات ثابتة اختيارية

٤١ – حل (أ) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - 4\frac{d\mathbf{r}}{dt} - 5\mathbf{r} = 0$ (ب) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} = 0$ (جـ) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 4\mathbf{r} = 0$

الإجابة : (أ) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 e^{5t} + \mathbf{C}_2 e^{-t}$ (ب) $\mathbf{r} = e^{-t}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$ (جـ) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 \cos 2t + \mathbf{C}_2 \sin 2t$

٤٢ – حل $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathbf{Y}$, $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{X}$ الإجابة : $\mathbf{X} = \mathbf{C}_1 \cos t + \mathbf{C}_2 \sin t$, $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_1 \sin t - \mathbf{C}_2 \cos t$

٤٣ – إذا كان $\mathbf{A} = \cos xy\,\mathbf{i} + (3xy - 2x^2)\mathbf{j} - (3x + 2y)\mathbf{k}$ أوجد $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}$

الجواب :

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = -y\sin xy\,\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = -x\sin xy\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} = -y^2\cos xy\,\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} = -x^2\cos xy\,\mathbf{i}, \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = -(xy\cos xy + \sin xy)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

٤٤ – إذا كان $\mathbf{B} = 2x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = x^2yz\,\mathbf{i} - 2xz^3\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$ أوجد $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ at $(1, 0, -2)$

الإجابة : $-4\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

٤٥ – إذا كان $\mathbf{C}_1$ و $\mathbf{C}_2$ تكون متجهات ثابتة و λ كمية عددية ثابتة بين أن $\mathbf{H} = e^{-\lambda x}(\mathbf{C}_1 \sin\lambda y + \mathbf{C}_2 \cos\lambda y)$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2} = 0$

٤٦ – أثبت أن $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r}$ حيث $\mathbf{p}_0$ متجه ثابت و ω و c كميات عددية ثابتة و $i = \sqrt{-1}$

وتحقق المعادلة $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$ ، هذه النتيجة مهمة فى النظرية الكهرو مغناطيسية

تفاضل الهندسى :

٤٧ – أوجد (أ) وحدة المماس $\mathbf{T}$ (ب) الانحناء κ (جـ) المتجه الأساسى العمودى $\mathbf{N}$ (د) ثنائى التعامد $\mathbf{B}$ (هـ) الالتواء τ لمنحنى الفراغ $x = t - t^3/3, y = t^2, z = t + t^3/3$

الإجابة : (أ) $\mathbf{T} = \dfrac{(1-t^2)\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + (1+t^2)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$ (جـ) $\mathbf{N} = -\dfrac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j}$

(ب) $\kappa = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ (د) $\mathbf{B} = \dfrac{(t^2-1)\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j} + (t^2+1)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$ (هـ) $\tau = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

٤٨ – عرف منحنى فراغ بدلالة طول قوس البرامتر s بالمعادلة

$$x = \text{arc tan}\, s, \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln(s^2+1), \quad z = s - \text{arc tan}\, s$$

أوجد (أ) $\mathbf{T}$ ، (ب) $\mathbf{N}$ ، (جـ) $\mathbf{B}$ ، (د) κ ، (هـ) τ ، (و) ρ ، (س) σ .

الإجابة (أ) $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{i} + \sqrt{2}s\,\mathbf{j} + s^2\mathbf{k}}{s^2+1}$ (د) $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2+1}$

(ب) $\mathbf{N} = \dfrac{-\sqrt{2}s\,\mathbf{i} + (1-s^2)\mathbf{j} + \sqrt{2}s\,\mathbf{k}}{s^2+1}$ (هـ) $\tau = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2+1}$ (س) $\sigma = \dfrac{s^2+1}{\sqrt{2}}$

(جـ) $\mathbf{B} = \dfrac{s^2\mathbf{i} - \sqrt{2}s\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{s^2+1}$ (و) $= \dfrac{s^2+1}{\sqrt{2}}$

٤٩ – أوجد κ و τ لمنحنى الفراغ $x = t, y = t^2, z = t^3$ المسمى المكعب الملتوى

الإجابة : $\tau = \dfrac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$ ، $\kappa = \dfrac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}$

٥٠ – بين أن الالتواء لمستوى الانحناء $\tau = 0$.

٥١ – أوجد الأنحناء ونصف قطر الانحناء للمنحنى الذى له متجه الموضع $y = f(x), z = 0$ وأى أن المنحنى فى المستوى y و x يعطى بالمعادلة $= \dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$

٥٢ – أوجد الانحناء ونصف قطر الانحناء للمنحنى الذى له متجه الموضع $\mathbf{r} = a\cos u\,\mathbf{i} + b\sin u\,\mathbf{j}$ حيث a و b ثوابت موجبة فسر الحالة التى فيها $a = b$

الإجابة : $\kappa = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{3/2}} = \dfrac{1}{\rho}$ إذا كان $a = b$ لمنحنى المعطى هو قطع ناقص يصبح دائرة نصف قطرها a ونصف قطر الانحناء $\rho = a$

٥٣ – بين أن صيغة فرنت – سيرت يمكن كتابتها فى الصورة $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{T},\ \dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N},\ \dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}$

وأوجد $\boldsymbol{\omega}$ الإجابة : $\boldsymbol{\omega} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$.

٥٤ – أثبت أن الانحناء لمنحنى الفراغ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ يعطى عددياً بالقيمة $\kappa = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$ حيث النقط معناها التفاضل بالنسبة إلى الزمن t

٥٥ – أثبت أن $\tau = \dfrac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$ لمنحنى الفراغ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$

(ب) إذا كان البراميتر t هو طول القوس S بين أن $\tau = \dfrac{\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \dfrac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{(d^2\mathbf{r}/ds^2)^2}$

٥٦ – إذا كان $Q=r \times r$ بين أن $\kappa = \dfrac{Q}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$ ، $\tau = \dfrac{\mathbf{Q} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{Q^2}$

٥٧ – أوجد κ و τ لمنحنى الفراغ $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ z = 4\sin(\theta/2)$

الإجابة : $\kappa = \frac{1}{8}\sqrt{6 - 2\cos\theta},\quad \tau = \dfrac{(3 + \cos\theta)\cos\theta/2 + 2\sin\theta\ \sin\theta/2}{12\cos\theta - 4}$

أوجد التواء المنحنى $x = \dfrac{2t+1}{t-1},\ y = \dfrac{t^2}{t-1},\ z = t+2$ اشرح إجابتك

الجواب : $\tau = 0$. يقع المنحنى على المستوى $x - 3y + 3z = 5$

٥٩ – بين أن معادلات المماس الخطية والعمود الأساسي وثنائي التعامد لمنحنى الفراغ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ عند النقطة $t=t_0$ يمكن كتابتها على الترتيب $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{T}_0,\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{N}_0\ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{B}_0$ حيث t هي براميتر

٦٠ – أوجد معادلات للآتي (أ) المماس (ب) العمود الأساسي (جـ) ثنائي التعامد للمنحنى $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t$ و $z = 4t$ عند النقطه التي فيها $t=\pi$

الإجابة : (أ) المماس $x = -3,\ y = -\frac{3}{5}t,\ z = 4\pi + \frac{4}{5}t$ أو $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{k} + t(-\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k})$

(ب) العمودى $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t\mathbf{i}$ أو $x = -3 + t,\ y = 4\pi,\ z = 0$

(جـ) ثنائي التعامد $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t(\frac{4}{5}\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k})$ أو $x = -3,\ y = 4\pi + \frac{4}{5}t,\ z = \frac{3}{5}t$

٦١ – أوجد معادلات للآتي (أ) مستوى التمام (ب) المستوى العمودى (جـ) المستوى الموحد للمنحنى $x = 3t - t^3$ $y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$ عند النقطة التي فيها $t = 1$

الإجابة : (أ) $y - z + 1 = 0$ (ب) $y + z - 7 = 0$ (جـ) $x = 2$

٦٢ – (أ) بين أن تفاضل طول المنحنى على سطح $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ معطى بالمعادلة $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

حيث $E = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = (\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u})^2,\quad F = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\quad G = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v})^2$

(ب) أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون u, v لنظام أحداثيات منحنى الأضلاع متعامدة هو $F \equiv 0$

٦٣ – أوجد معادلة مستوى المماس للسطح $z = xy$ عند النقطة $(2, 3, 6)$. الجواب : $3x + 2y - z = 6$

٦٤ – أوجد معادلات مستوى المماس والخط العمودى للسطح $4z = x^2 - y^2$ عند النقطة $(3, 1, 2)$

الجواب : $3x - y - 2z = 4;\ x = 3t + 3,\ y = 1 - t,\ z = 2 - 2t$

٦٥ – أثبت أن وحدة المتجه العمودى للسطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ هى $\mathbf{n} = \pm \dfrac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$ ، حيث E, F, G معرفة من مسألة ٦٢ .

ميكانيكا :

٦٦ – جسم يتحرك على نفس المنحنى $\mathbf{r} = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j} + (8t^2 - 3t^3)\mathbf{k}$ حيث t هى الزمن . أوجد قيمة المركبات المماسية والعمودية للعجلة عند $t = 2$

الإجابة : المماسة ، 16 و العمودية $2\sqrt{36}$

٦٧ – إذا كانت سرعة جسم هى $\mathbf{v}$ وعجلته هى $\mathbf{a}$ على طول منحنى الفراغ . أثبت أن نصف قطر الانحناء لطريقة يعطى عددياً بالمعادلة $\rho = \dfrac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$

٦٨ – جذب جسم لنقطة ثابتة O بقوة $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$ تسمى القوة المركزية حيث $\mathbf{r}$ هو متجه الموضع لجسم بالنسبة إلى O بين أن $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ حيث $\mathbf{h}$ هو متجه ثابت . أثبت أن عزم كمية التحرك يساوى قيمة ثابتة

٦٩ – أثبت أن العجلة المتجهة لجسم يتحرك على طول منحنى فراغى دائماً يقع فى مستوى اللثام .

٧٠ – (أ) أوجد العجلة لجسم يتحرك فى المستوى xy بدلالة الأحداثيات القطبية (ρ, ϕ)

(ب) ما هى مركبات العجلة الموازية والعمودية على ρ ؟

الجواب : (أ)

$$\ddot{\mathbf{r}} = [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\cos\phi - (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\sin\phi]\,\mathbf{i} + [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\sin\phi + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\cos\phi]\,\mathbf{j}$$

(ب) $\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2,\ \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$

الفصل الرابع

الانحدار والتباعد والالتفاف

العامل التفاضلي للمتجه (ديل) : تكتب ∇ وتعرف بالمعادلة

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

عامل المتجه هذا يمتلك خواص تشابه تلك المتجهات العادية . من المفيد فى تعريف ثلاث كميات التى تظهر فى التطبيقات العملية ومعروفة كالانحدار والتباعد والالتفاف . العامل ∇ معروف أيضا بنابلا .

الانحدار : لتكن $\phi(x, y, z)$ معرفة وقابلة التفاضل عند كل نقطة (x, y, z) فى منطقة معينة فى الفراغ (أى أن ϕ هى المجال العددى القابل للتفاضل) . إذن فإن انحدار ϕ تكتب على صورة $\nabla\phi$ أو انحدار ϕ $(\text{grad}\,\phi)$ ويعرف بالمعادلة .

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

لاحظ أن $\nabla\phi$ تعرف مجال متجه

مركبة $\nabla\phi$ فى اتجاه وحدة المتجه $\mathbf{a}$ هى $\nabla\phi \cdot \mathbf{a}$ وتسمى التفاضل الاتجاهى للقيمة ϕ فى اتجاه $\mathbf{a}$. فيزيائيا هذا هو معدل تغير ϕ عند (x, y, z) فى اتجاه $\mathbf{a}$.

التباعد : ليكن $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ معرفة وقابلة التفاضل عند كل نقطة (x, y, z) فى نقطة معينة فى الفراغ (أى أن $\mathbf{V}$ هى مجال المتجه القابل للتفاضل) . إذن تباعد $\mathbf{V}$ يكتب على الصورة $\nabla.\mathbf{V}$ أو $\text{div}\,\mathbf{V}$ وتعرف بالمعادلة

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\end{aligned}$$

لاحظ التشابه مع $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ أيضا لاحظ أن $\nabla\cdot\mathbf{V} \neq \mathbf{V}\cdot\nabla$

الالتفاف : إذا كان $\mathbf{V}(x, y, z)$ مجال متجه قابل للتفاضل إذن الالتفاف $\mathbf{V}$ يكتب $\text{rot}\,\mathbf{V}$ أو $\text{curl}\,\mathbf{v}$ و $\nabla \times \mathbf{V}$ ويعرف بالمعادلة

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

لاحظ أنه عند فك المحدد فإن العوامل $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ لابد أن تسبق V_1, V_2, V_3

الصيغ المتضمنة ∇ : إذا كان $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ دوال متجه قابلة للتفاضل و ψ و ϕ دوال عددية قابلة للتفاضل للموضع $(x، y، z)$ إذن

(١) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ أو $\text{grad}\,(\phi + \psi) = \text{grad}\,\phi + \text{grad}\,\psi$

(٢) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ أو $\text{div}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\,\mathbf{A} + \text{div}\,\mathbf{B}$

(٣) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ أو $\text{curl}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{curl}\,\mathbf{A} + \text{curl}\,\mathbf{B}$

(٤) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(٥) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(٦) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(٧) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

(٨) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

(٩) $\nabla \cdot (\nabla\phi) \equiv \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

حيث $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ تسمى معامل لابلاس

(١٠) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ التفاف الانحدار للقيمة ϕ تكون صفر

(١١) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$ التفاف التباعد للمتجه **A** يكون صفر

(١٢) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

فى الصيغ من ٩ – ١٢ افترض أن ϕ ,**A** لهما مشتقة ثانية جزئية مستمرة .

الثبات : خذ فى الاعتبار نظامى احداثيات متعامدة (x, y, z) و $(x' y' z')$ شكل ٤ – ١ لهما نفس نقطة الأصل O ولكن محاورها تدور بالنسبة لبعضهما البعض .

النقطة P فى الفراغ لها الأحداثيات (x, y, z) أو (x', y', z') بالنسبة لهذين النظامين من الإحداثيات . معادلات التحويل بين الأحداثيات أو تحولات الاحداثى تعطى بالمعادلات .

$$(1)\quad \begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \end{aligned}$$

شكل ٤ – ١

حيث $l_{jk}, j, k = 1, 2, 3$ تمثل اتجاهات جيوب التمام للمحاور x', y', z' بالنسبة للمحاور x, y, z (أنظر مسألة ٣٨) . فى حالة عدم انطباق نقط الأصل لنظامى الأحداثيات فإن معادلات التحويل تصبح .

$$(٢)\quad \begin{cases} x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\ y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\ z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3 \end{cases}$$

حيث الأصل O لنظام الاحداثيات x, y, z تقع عند النقطة (a'_1, a'_2, a'_3) بالنسبة لنظام الاحداثيات $x' y' z'$.

معادلات التحول (١) تمثل التفاف (دوران) فى بينما المعادلات (٢) تعرف دوران زائد إزاحة . حركة أى جسم صلب له تأثير ازاحة متبوعا بدوران التحول (١) يسمى تحولا عموديا . التحول الخطى العام يسمى تحولا متصلا (منتسبا) .

فيزيائيا دالة النقطة العددية أو المجال العددى $\phi(x, y, z)$ المحسوب عند نقطة معينة يجب أن يكون مستقلا عن احداثيات النقطة . لذلك فإن درجة الحرارة عند نقطة لاتتوقف (تعتمد) على أن الأحداثيات قد استعملت (x, y, z) أو (x', y', z') إذن إذا كانت $\phi(x, y, z)$ هى درجة الحرارة عند نقطة P التى لها الأحداثيات (x, y, z) بينما $\phi'(x', y', z')$ هى درجة الحرارة عند نفس النقطة P ذات الاحداثيات (x', y', z') فيجب أن تكون $\phi(x, y, z) = \phi(x', y', z')$. إذا كان $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$ حيث x, y, z و x', y', z' تكون مرتبطة بمعادلات التحول (١) أو (٢)

وتسمى $\phi(x, y, z)$ الثابت بالنسبة إلى التحول . كمثال $x^2 + y^2 + z^2$ هي ثابت تحت التحول الدوراني .

(١) حيث $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

بالمثل دالة نقطة متجه أو مجال متجه $\mathbf{A}(x, y, z)$ تسمى ثابت إذا كان $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x', y', z')$ ويكون هذا صحيحا إذا كان

$$A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k} = A_1'(x',y',z')\mathbf{i}' + A_2'(x',y',z')\mathbf{j}' + A_3'(x',y',z')\mathbf{k}'$$

في الفصل السابع والثامن ستؤخذ في الاعتبار تحولات عامة أكثر مع التوسع في المبادئ المذكورة عاليه .

يمكن أن نبين (أنظر مسألة ٤١) أن الانحدار لثابت مجال عددي هو ثابت مجال متجه بالنسبة للتحولات (١) أو (٢) . بالمثل التباعد والالتفاف لثابت مجال متجه هو ثابت تحت هذه التحولات .

امثلة محلولة

الانحدار :

١ – إذا كان $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$ أوجد $\nabla\phi$ (or grad ϕ) at the point $(1, -2, -1)$.

1. If $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$, find $\nabla\phi$ (or grad ϕ) at the point $(1, -2, -1)$.

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(3x^2y - y^3z^2) \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2) \\
&= 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} - 2y^3z\,\mathbf{k} \\
&= 6(1)(-2)\mathbf{i} + \{3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2\}\mathbf{j} - 2(-2)^3(-1)\mathbf{k} \\
&= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k}
\end{aligned}$$

٢ – أثبت (أ) $\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G$، (ب) $\nabla(FG) = F\,\nabla G + G\,\nabla F$ حيث G, F هي دوال عددية قابلة للتفاضل عند x, y, z

(أ).

$$\begin{aligned}
\nabla(F+G) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(F+G) \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G) \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z} \\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)G = \nabla F + \nabla G
\end{aligned}$$

(ب)

$$\nabla(FG) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(FG)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(FG)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(FG)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(FG)\mathbf{k}$$

$$= \left(F\frac{\partial G}{\partial x} + G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(F\frac{\partial G}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(F\frac{\partial G}{\partial z} + G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$= F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\mathbf{k}\right) + G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) = F\nabla G + G\nabla F$$

٣ – أوجـد $\nabla\phi$ if (a) $\phi = \ln|\mathbf{r}|$, (b) $\phi = \frac{1}{r}$

(أ)

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Then $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ and $\phi = \ln|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$.

$$\nabla\phi = \tfrac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

(ب)

$$\nabla\phi = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \nabla\{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= \mathbf{i}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\} + \mathbf{j}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y\} + \mathbf{k}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z\}$$

$$= \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

٤ – بين أن $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

$$\nabla r^n = \nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\}$$

$$= \mathbf{i}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2x\} + \mathbf{j}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2y\} + \mathbf{k}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2z\}$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= n(r^2)^{n/2-1}\mathbf{r} = nr^{n-2}\mathbf{r}$$

لاحظ أنه إذا كان $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ حيث $\mathbf{r}_1$ هي وحدة المتجه في اتجاه $\mathbf{r}$ إذن $\nabla r^n = nr^{n-1}\mathbf{r}_1$

٥ – بين أن $\nabla\phi$ هو متجه عمودى على السطح $\phi(x, y, z) = c$ حيث c ثابت

ليكن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ هو متجه الموضع لأى نقطة $P(x, y, z)$ على السطح .

إذن $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ تقع فى المستوى المماس للسطح عند P

ولكن

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = 0$$

أى أن $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$ وبذلك $\nabla\phi$ يكون عموديا على $d\mathbf{r}$ وبالتالى على السطح .

٦ – أوجد الوحدة العمودية للسطح $x^2y + 2xz = 4$ عند النقطة $(2, -2, 3)$

$$\nabla(x^2y + 2xz) = (2xy + 2z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$ عند النقطة $(2, -2, 3)$

إذن الوحدة العمودية للسطح $$= \frac{-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (4)^2}} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

وحدة عمودية أخرى هى $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ لها اتجاه معاكس للوحدة العمودية الموضحة عالية .

٧ – أوجد معادلة مستوى المماس للسطح $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ عند النقطة $(1, -1, 2)$

$$\nabla(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$$

إذن العمودى للسطح عند النقطة $(1, -1, 2)$ هى $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ معادلة المستوى المار خلال النقطة التى لها متجه الموضع $\mathbf{r}_0$ ويكون متعامدا على العمود $\mathbf{N}$ هو $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N} = 0$ (أنظر الفصل الثانى . مسألة ١٨)

إذن المعادلة المطلوبة هى

$$[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})]\cdot(7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = 0$$

أو

$$7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) = 0.$$

٨ – ليكن $\phi(x, y, z)$ و $\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ هى درجات الحرارة عند نقطتين متقاربين $P(x, y, z)$ و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ لمنطقة معينة

(أ) علل فيزيائيا الكمية $\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ حيث Δs هى المسافة بين النقطتين P ϕ

(ب) احسب $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ أو علل فيزيائيا .

(جـ) بين أن $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$

(أ) حيث $\Delta\phi$ هى التغير فى درجة الحرارة بين نقطتين P و Q و Δs هى المسافة بين هاتين النقطتين ، وتمثل $\Delta\phi/\Delta s$ متوسط معدل تغير درجة الحرارة لكل وحدة مسافة فى الاتجاه من P إلى Q .

(ب) من حساب التفاضل والتكامل

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z +$$ رتب متناهية الصغر أعلى من $\Delta x, \Delta y$ و Δz

إذن $$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

أو $$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$d\phi/ds$ يمثل معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عند النقطة P فى اتجاه نحو النقطة Q . هذه أيضا تسمى المشتقات الاتجاهية للكمية ϕ .

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) \quad (1)$$

$$= \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

لاحظ حيث أن $d\mathbf{r}/ds$ هى وحدة المتجه و $\Delta\phi\cdot d\mathbf{r}/ds$ هى مركبة $\nabla\phi$ فى اتجاه وحدة المتجه هذا .

٩ – بين أن أكبر معدل لتغير ϕ . أى أن أكبر المشتقات الاتجاهية . تأخذ اتجاه وقيمة المتجه $\nabla\phi$.

من المسألة (٨ جـ) و $d\phi/ds = \Delta\phi\,.\,d\mathbf{r}/ds$ هو اسقاط $\Delta\phi$ فى اتجاه $d\mathbf{r}/ds$. هذا الاسقاط يكون أكبر ما يمكن عندما $d\mathbf{r}/ds, \Delta\phi$ يكون لهما نفس الاتجاه . إذن أكبر قيمة لـ $d\phi/ds$ تكون فى اتجاه $\nabla\phi$ وقيمتها هى $|\nabla\phi|$.

١٠ – أوجد المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi = x^2yz + 4xz^2$ عند $(1,-2,-1)$ فى اتجاه $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$
$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{عند} \quad (1,-2,-1).$$

وحدة المتجه فى اتجاه $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ هو

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

إذا المشتقة الاتجاهية المطلوبة هى

$$\nabla\phi\cdot\mathbf{a} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

حيث تكون موجبة و ϕ تتزايد فى هذا الاتجاه .

١١ – (أ) فى أى اتجاه من النقطة $(2, 1, -1)$ تكون المشتقة للكمية $\phi = x^2yz^3$ أكبر ما يمكن ؟

(ب) ما هى القيمة الكبرى ؟

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz^3) = 2xyz^3\,\mathbf{i} + x^2z^3\,\mathbf{j} + 3x^2yz^2\,\mathbf{k}$$
$$= -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \quad \text{at} \quad (2,1,-1)$$

إذن باستخدام المسألة ٩ .

(أ) تكون المشتقة الاتجاهية أكبر ما يمكن فى الاتجاه $\nabla\phi = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

(ب) هذه القيمة الكبرى هى

$$|\nabla\phi| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

١٢ – أوجد الزاوية بين السطحين $z = x^2+y^2-3$ و $x^2+y^2+z^2 = 9$ عند النقطة $(2,-1,2)$

الزاوية بين السطوح عند النقطة هى الزاوية بين الأعمدة للأسطح عند النقطة .

العمودى للكية $x^2+y^2+z^2 = 9$ at $(2,-1,2)$ يكون

$$\nabla\phi_1 = \nabla(x^2+y^2+z^2) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

العمودى للكية $z = x^2+y^2-3$ or $x^2+y^2-z = 3$ at $(2,-1,2)$ يكون

$$\nabla\phi_2 = \nabla(x^2+y^2-z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$(\nabla\phi_1)\cdot(\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1|\,|\nabla\phi_2|\cos\theta$ حيث θ هى الزاوية المطلوبة . إذن

$$(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}|\,|4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}|\cos\theta$$
$$16 + 4 - 4 = \sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2}\;\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(-1)^2}\,\cos\theta$$

و $\cos\theta = \dfrac{16}{6\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{63} = 0.5819$ حينئذ الزاوية الحادة هى $\theta = \text{arc cos } 0.5819 = 54^\circ 25'$

١٣ – لتكن R هى المسافة من نقطة ثابتة $A(a,b,c)$ إلى أى نقطة $P(x,y,z)$. بين أن ∇R هى وحدة المتجه فى اتجاه $\mathbf{AP} = \mathbf{R}$

إذا كان $\mathbf{r}_R$ و $\mathbf{r}_P$ هى متجهات الموضع $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ لكل من P و A على الترتيب . إذن

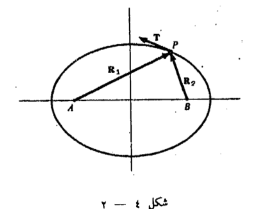
$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}$$

بحيث أن $R = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ إذن

$$\nabla R = \nabla\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right) = \frac{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

يكون وحدة المتجه فى اتجاه $\mathbf{R}$.

١٤ – لتكن P . أى نقطة على القطع الناقص اللى بؤرتاه عند النقطتين B و A شكل . ٤–٢ اثبت أن الخطين AP و BP يصنعان زوايا متساوية مع المماس للقطع الناقص عند P



شكل ٤ — ٢

ليكن $\mathbf{R}_1 = \mathbf{AP}$, $R_2 = \mathbf{BP}$ تبين المتجهات المرسومة من البؤرة A وكذلك البؤرة B على الترتيب إلى النقطة P الواقعة على الناقص . وليكن $\mathbf{T}$ وحدة المماس للقطع الناقص عنـد P .

حيث أن القطع الناقص هو المحل الهندسى لكل النقط P التى مجموع مسافاته من النقطتين الثابتين A و B تكون ثابت p . ونرى أن معادلة القطع الناقص تكون $\mathbf{R}_1 + R_2 = p$.

من المسألة (٥) ، العمود على القطع الناقص هو $\nabla(R_1 + R_2)$ وبالتالى

$$[\nabla(R_1+R_2)]\cdot\mathbf{T} = 0 \quad \text{or} \quad (\nabla R_2)\cdot\mathbf{T} = -(\nabla R_1)\cdot\mathbf{T}$$

حيث ∇R_1, ∇R_2 هى وحدة المتجهات فى اتجاه $\mathbf{R}_2$, R_2 على الترتيب مسألة (١٣) ، جيب تمام الزاوية بين ∇R_2, $\mathbf{T}$ تساوى جيب تمام الزاوية بين ∇R_1, $-\mathbf{T}$

وبالتالى فالزوايا نفسها متساوية . المسألة لها تعليل فيزيائى . أشعة الضوء (أو الموجات الضوئية) منبعثة من البؤرة A على سبيل المثال سوف تنعكس من القطع الناقص إلى البؤرة B .

التباعد :

١٥ – إذا كان $\mathbf{A} = x^2z\,\mathbf{i} - 2y^3z^2\,\mathbf{j} + xy^2z\,\mathbf{k}$ أوجـد $\nabla\cdot\mathbf{A}$ (or div $\mathbf{A}$) ; عند النقطة $(1,-1,1)$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x^2z\,\mathbf{i} - 2y^3z^2\,\mathbf{j} + xy^2z\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$

$$= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2 = 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \quad \text{at } (1,-1,1).$$

١٦ – أعطيت $\phi = 2x^3y^2z^4$ (أ) أوجـد $\nabla\cdot\nabla\phi$ (or div grad ϕ)

(ب) بين أن $\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi$ حيث $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ تبين عاملا لابلاس

(أ)

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4)$$

$$= 6x^2y^2z^4\,\mathbf{i} + 4x^3yz^4\,\mathbf{j} + 8x^3y^2z^3\,\mathbf{k}$$

إذن

$$\nabla\cdot\nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(6x^2y^2z^4\mathbf{i} + 4x^3yz^4\mathbf{j} + 8x^3y^2z^3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)$$

$$= 12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2$$

(ب)

$$\nabla\cdot\nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\phi}{\partial z}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi = \nabla^2\phi$$

١٧ – أثبت أن $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0.$

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}]$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

إذن بالجمع

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = 0$$

المعادلة $\nabla^2\phi = 0$ تسمى معادلة لابلاس . ومنها يظهر أن $\phi = 1/r$ هو حل هذه المعادلة .

١٨ – أثبت

(أ) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$

(ب) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k} \qquad (أ)$$

إذن

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left[(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(A_1+B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2+B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3+B_3) \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) &= \nabla\cdot(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3) \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial z} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \\
&= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}$$

١٩ – أثبت $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$

ليكن $\phi = r^{-3}$ و $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ من ناتج مسألة (١٨ ب)

إذن

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) &= (\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r} + (r^{-3})\nabla\cdot\mathbf{r} \\
&= -3r^{-5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3} = 0
\end{aligned}$$

استخدم مسألة ٤

٢٠ – برهن $\nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U$

من المسألة (١٨ب) مع

$$\phi = U \quad و \quad \mathbf{A} = \nabla V,$$

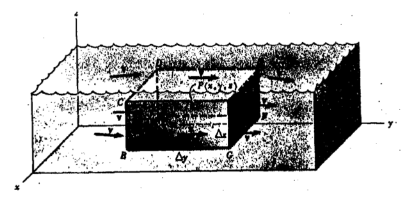
$$\nabla\cdot(U\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U(\nabla\cdot\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U\nabla^2 V$$

بتبادل U و V ينتج $\nabla\cdot(V\nabla U) = (\nabla V)\cdot(\nabla U) + V\nabla^2 U$

إذن بالطرح

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(U\nabla V) - \nabla\cdot(V\nabla U) &= \nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U)\\ &= (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U\nabla^2 V - [(\nabla V)\cdot(\nabla U) + V\nabla^2 U]\\ &= U\nabla^2 V - V\nabla^2 U\end{aligned}$$

٢١ – مائع يتحرك بحيث أن سرعته عند أى نقطة تكون $\mathbf{v}(x, y, z)$. بين أن زيادة السائل لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن فى متوازى سطوح صغيرة مركزة عند $P(x, y, z)$ وأحرفه توازى محاور الأحداثيات ولها القيم $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ على الترتيب يعطى تقريبا بالمعادلة $\text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$.



شكل ٤ – ٣

بالرجوع إلى شكل ٤ – ٣

x مركبة السرعة $\mathbf{v}$ عند P $= v_1$

x مركبة $\mathbf{v}$ عند مركز الوجه $AFED$ $\quad = v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ تقريبا .

x مركبة $\mathbf{v}$ عند مركز الوجه $GHCB$ $\quad = v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ تقريبا .

إذن (١) حجم المائع الذى يعبر $AFED$ فى وحدة الزمن $= (v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z =$

(٢) حجم المائع الذى يعبر $GHCB$ فى وحدة الزمن $= (v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z =$

الزيادة فى الحجم لكل وحدة زمن فى اتجاه x $= \frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z = (2) - (1)$.

بالمثل . الزيادة فى الحجم لكل وحدة زمن فى اتجاه y $= \frac{\partial v_2}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z =$

الزيادة فى الحجم لكل وحدة زمن فى اتجاه z $= \frac{\partial v_3}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$

إذن الزيادة الكلية فى الحجم لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن =

$$= \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

هذه صحيحة فقط فى النهاية التى ينكمش متوازى السطوح إلى P أى أن $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ تقترب من الصفر . إذا كان لا يوجد زيادة المائع فى أى مكان ، إذن $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ وهذه تسمى المعادلة المستمرة المائع غير القابل للانضغاط . حيث أن السائل لا يمكن أن يخلق أو ينعدم عند أى نقطة ، يقال أنه لا يوجد منبع أو مصب . متجه مثل $\mathbf{v}$ التى تباعده يساوى صفرا فى بعض الأحيان يسمى لولبى .

٢٢ – أوجد الثابت a بحيث أن المتجه $\mathbf{V} = (x+3y)\mathbf{i} + (y-2z)\mathbf{j} + (x+az)\mathbf{k}$ يكون لولبيا

يكون المتجه $\mathbf{v}$ لولبيا إذا كان تباعده يساوى صفرا (مسألة ٢١) .

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) = 1 + 1 + a$$

إذن $\nabla\cdot\mathbf{V} = a+2 = 0$ when $a = -2$

الالتفاف او الدوران :

٢٣ – إذا كان $\mathbf{A} = xz^3\,\mathbf{i} - 2x^2yz\,\mathbf{j} + 2yz^4\,\mathbf{k}$ أوجد $\nabla\times\mathbf{A}$ (التفاف A) عند النقطة $(1,-1,1)$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(xz^3\,\mathbf{i} - 2x^2yz\,\mathbf{j} + 2yz^4\,\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\mathbf{k}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\mathbf{i} + 3xz^2\,\mathbf{j} - 4xyz\,\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \text{at } (1,-1,1)$$

٢٤ – إذا كان $\mathbf{A} = x^2y\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$ أوجد التفاف التفاف $\mathbf{A}$

التفاف التفاف $\mathbf{A} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$

$$= \nabla\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla\times\left[(2x+2z)\mathbf{i} - (x^2+2z)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix} = (2x+2)\mathbf{j}$$

٢٥ – أثبت (أ) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$

(ب) $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi(\nabla\times\mathbf{A})$

(أ) ليكن

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k},\quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$$

إذن

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times\left[(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_3+B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2+B_2)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_1+B_1) - \frac{\partial}{\partial x}(A_3+B_3)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_2+B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1+B_1)\right]\mathbf{k}$$

$$= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right]\mathbf{k} + \left[\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right]\mathbf{k}$$

$$= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$

(ب)

$$\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\times(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right]\mathbf{k}$$

$$= [\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2]\mathbf{i}$$
$$+ [\phi\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z}A_1 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_3]\mathbf{j} + [\phi\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_1]\mathbf{k}$$

$$= \phi[(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}]$$
$$+ [(\frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2)\mathbf{i} + (\frac{\partial \phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x}A_3)\mathbf{j} + (\frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_1)\mathbf{k}]$$

$$= \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}$$

٢٦– احسب $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ if $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

ليكن $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \ \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

إذن

$$\mathbf{A} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= (zA_2 - yA_3)\mathbf{i} + (xA_3 - zA_1)\mathbf{j} + (yA_1 - xA_2)\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z}(yA_1 - xA_2)$$
$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y\frac{\partial A_3}{\partial x} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$
$$= x(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) + y(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + z(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})$$
$$= [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \cdot [(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}]$$

$= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \text{curl}\, \mathbf{A}$. إذن $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

يصل هذا الصفر

٢٧– أثبت (أ) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ (curl grad $\phi = 0$) (ب) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(تباعد الالتفاف $\mathbf{A} = 0$)

(أ)

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial x}\right)\mathbf{k} = 0$$

على فرض أن ϕ لها المشتقة الثانية الجزئيه المستمرة بحيث أن رتبه التفاضل غير ذات موضوع .

(ب)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\, \partial y} = 0$$

بفرض أن التفاضل الجزئى الثانى للمتجه $\mathbf{A}$ مستمر

لاحظ التماثل بين النتائج السابقة والنتائج $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}m) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C})\, m = 0$ حيث m كية عددية

و $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = 0$

٢٨ – أوجد التفاف $(\mathbf{r} f(r))$ حيث $f(r)$ قابلة التفاضل

$$\text{curl}\,(\mathbf{r} f(r)) = \nabla \times (\mathbf{r} f(r))$$

$$= \nabla \times (x f(r)\mathbf{i} + y f(r)\mathbf{j} + z f(r)\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x f(r) & y f(r) & z f(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ولكن $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial r})(\frac{\partial r}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \frac{f'(r)\,x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'x}{r}$

بالتماثل $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'y}{r}$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'z}{r}$

إذن النتيجة $= (z\frac{f'y}{r} - y\frac{f'z}{r})\mathbf{i} + (x\frac{f'z}{r} - z\frac{f'x}{r})\mathbf{j} + (y\frac{f'x}{r} - x\frac{f'y}{r})\mathbf{k} = \mathbf{0}$

٢٩ – أثبت $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \times \left[(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\right]\mathbf{i}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\right]\mathbf{j}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\right]\mathbf{k}$$

$$= (-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2})\mathbf{i} + (-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2})\mathbf{j} + (-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2})\mathbf{k}$$
$$+ (\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial z})\mathbf{k}$$

$$= (-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2})\mathbf{i} + (-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2})\mathbf{j} + (-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2})\mathbf{k}$$
$$+ (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2})\mathbf{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})$$

$$+\ \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= -\nabla^2\mathbf{A}+\nabla\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= -\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

إذا رغبنا يمكن اختصار مجهود الكتابة فى هذا التفاضل كما فى غيره من مشتقات بكتابة المركبة $\mathbf{i}$ فقط حيث يمكن الحصول على الآخرين بالتشابه .

يمكن استنتاج صيغة النتيجة كالآتى من المسألة ٤٧ (أ) الباب الثانى .

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \qquad (١)$$

ضع $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\nabla$ و $\mathbf{C}=\mathbf{F}$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F}$$

لاحظ أن الصيغة (١) لابد أن تكتب بحيث أن العاملين المؤثرين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تسبق المعمول عليه $\mathbf{C}$ أو أن الصيغ لاتصلح للتطبيق .

٣٠ – إذا كان $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ أثبت أن $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\,\text{curl}\,\mathbf{v}$ حيث $\boldsymbol{\omega}$ هى متجه ثابت .

$$\text{curl}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \omega_1&\omega_2&\omega_3\\ x&y&z\end{vmatrix}$$

$$= \nabla\times[(\omega_2z-\omega_3y)\mathbf{i}+(\omega_3x-\omega_1z)\mathbf{j}+(\omega_1y-\omega_2x)\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_2z-\omega_3y&\omega_3x-\omega_1z&\omega_1y-\omega_2x\end{vmatrix} = 2(\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

إذن $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}=\frac{1}{2}\,\text{curl}\,\mathbf{v}.$

تبين هذه المسألة أن الالتفاف لمجال متجه له علاقة بخواص الدوران للمجال وأكد هذا فى الفصل السادس . إذا كان المجال $\mathbf{F}$ نتيجة لحركة مائع مثلا . عجلة تجديف موضوعة عند نقطة مختلفة فى المجال . فإنها تميل للدوران

فى المنطقة التى فيها $\text{Curl}\,\mathbf{F} \neq 0$ ، بينما إذا كان $\text{Curl}\,\mathbf{F} = 0$ فى المنطقة بالتالى لا يوجد دوران . ويسمى المجال $\mathbf{F}$ لا دورانى . المجال الذى لا يكون لا دورانى أحيانا يسمى مجال دوامى vortex field .

٣١ - إذا كان $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{H} = 0,\ \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ بين أن $\mathbf{H}$ و $\mathbf{E}$ تحقق $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

من المسألة ٢٩

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E},\quad \text{Then } \nabla^2\mathbf{E} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

وبالمثل

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\times\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$$

ولكن

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H}$$

إذن $\nabla^2\mathbf{H} = \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

ترتبط المعادلات المعطاة بمعادلات ماكويل فى النظرية الكهرومغناطيسية المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ تسمى معادلة الموجة (wave) .

مسائل متنوعة

٣٢ - (أ) يسمى المتجه $\mathbf{V}$ لا دورانى إذا كان $\text{Curl}\,\mathbf{V} = 0$ (أنظر مسألة ٣٠) أوجد الثوابت a, b, c بحيث أن

$$\mathbf{V} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$$

يكون لادورانى

(ب) بين أن $\mathbf{V}$ يمكن التعبير عنها كإنحدار للدالة العددية

(١)

$$\text{curl}\,\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (c+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b-2)\mathbf{k}$$

هذه تساوى صفرا عندما $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$

و

$$\mathbf{V} = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k}$$

(ب) افترض $\mathbf{V} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

إذن (١) $\frac{\partial\phi}{\partial x} = x + 2y + 4z, \quad (2)\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x - 3y - z, \quad (3)\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 4x - y + 2z$

تكامل (١) جزئيا بالنسبة لـ x مع الاحتفاظ بـ y, z ثابتة (٤)

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z)$$

حيث $f(y,z)$ هي دالة اختيارية فى y, z بالمثل من (٢) ، (٣)

$$\phi = 2xy - \frac{3y^2}{2} - yz + g(x,z) \quad (٥)$$

$$\phi = 4xz - yz + z^2 + h(x,y) \quad (٦)$$

بمقارنة المعادلات (٤) ، (٥) ، (٦) يلاحظ وجود قيمة مشتركة للكية ϕ . إذا اخترنا .

$$f(y,z) = -\frac{3y^2}{2} + z^2, \quad g(x,z) = \frac{x^2}{2} + z^2, \quad h(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

لذلك

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

يلاحظ أنه يمكن إضافة أى ثابت للكية ϕ . على العموم إذا كانت $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ ، إذن يمكننا إيجاد ϕ بحيث أن $\mathbf{V} = \nabla\phi$. مجال المتجه $\mathbf{V}$ الذى يمكن اشتقاقه من المجال العددى ϕ . بحيث أن $\mathbf{V} = \nabla\phi$ تسمى مجال متجه محافظ وتسمى ϕ الجهد العددى . لاحظ عكسيا أنه إذا كان $\mathbf{V} = \nabla\phi$. إذن $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.
أنظر مسألة (٢٧ أ) .

٢٣ – بين أنه إذا كانت $\phi(x,y,z)$ هى أى حل لمعادلة لابلاس إذن $\nabla\phi$ يكون متجها لولبيا وغير دورانى .

من الفرض ϕ تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$ أى أن $\nabla\cdot(\nabla\phi) = 0$ إذن $\nabla\phi$ تكون لولبية (أنظر المسائل ٢١ – ٢٢)

من المسألة (٢٧ أ) ، $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ بحيث أن $\nabla\phi$ تكون أيضا غير دورانية .

٢٤ – أوجد التعريف الممكن لانحدار $\mathbf{B}$.

بفرض $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ إذا أمكن تعريف انحدار $\mathbf{B}$ بالصيغة الآتية

$$\nabla \mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{ii} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{ij} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{ik}$$

$$+ \frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{ji} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{jj} + \frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{jk}$$

$$+ \frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{ki} + \frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{kj} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{kk}$$

الكميات . . . $\mathbf{ij}, \mathbf{ij}$ الخ تسمى وحد ثنائية *Dyads* (لاحظ أن $\mathbf{ij}$ مثلا ليست مثل $\mathbf{ji}$) . كمية في الصيغة

$$a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}$$

تسمى ثنائية و المعاملات . . . $a_{11}, a_{12},$ هى مركباتها أى مصفوفة من هذه المركبات التسعة فى الصيغة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة ٣ فى ٣ . الثنائى هو تعميم لمتجه . ما زال يوجد تعميم آخر يؤدى إلى الثالوث *triadios* التى هى كميات تتكون من ٢٧ حد فى الصيغة . . . . $a_{111}\mathbf{iii} + a_{211}\mathbf{jii} +$ دراسة كيفية تحول المركبات الثنائية أو الثلاثية من نظام احداثيات إلى آخر يؤدى إلى دراسة تحليل الكميات الممتدة *tenscr analysis* التى سوف نتعرض لها فى الفصل الثامن .

٣٥– ليكن المتجه $\mathbf{A}$ معرف بالمعادلة $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ والثنائى Φ بالمعادلة

$$\Phi = a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}$$

أوجد تعريفا ممكنا للكمية $\mathbf{A}\cdot\Phi$.

بفرض ان قانون التوزيع صحيح

$$\mathbf{A}\cdot\Phi = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\Phi = A_1\mathbf{i}\cdot\Phi + A_2\mathbf{j}\cdot\Phi + A_3\mathbf{k}\cdot\Phi$$

كمثال ، أعتبر $\mathbf{i}\cdot\Phi$. تكون حاصل الضرب هذا بأخذ الضرب العددى (الدت) للقيمة $\mathbf{i}$ بكل حد من حدود Φ ثم جمع النتائج . كأمثلة نموذجية

$\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{ii},\ \mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{ij},\ \mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{ji},\ \mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{kj},$ الخ .

إذا أعطينا معنى لهذه الحدود كالآتى

$$\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{i}\mathbf{i} = a_{11}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_{11}\mathbf{i} \quad \text{حيث} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{i}\mathbf{j} = a_{12}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{j} = a_{12}\mathbf{j} \quad \text{حيث} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{j}\mathbf{i} = a_{21}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\mathbf{i} = 0 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{k}\mathbf{j} = a_{32}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{j} = 0 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$$

باعطاء تعليل مشابه لحدود الكميات $\mathbf{j}\cdot\Phi$ و $\mathbf{k}\,.\,\Phi$ إذن

$$\mathbf{A}\cdot\Phi = A_1(a_{11}\mathbf{i}+a_{12}\mathbf{j}+a_{13}\mathbf{k}) + A_2(a_{21}\mathbf{i}+a_{22}\mathbf{j}+a_{23}\mathbf{k}) + A_3(a_{31}\mathbf{i}+a_{32}\mathbf{j}+a_{33}\mathbf{k})$$

$$= (A_1a_{11}+A_2a_{21}+A_3a_{31})\mathbf{i} + (A_1a_{12}+A_2a_{22}+A_3a_{32})\mathbf{j} + (A_1a_{13}+A_2a_{23}+A_3a_{33})\mathbf{k}$$

التى هى كيه متجــه

٣٦ – (ا) علل الرمز $\mathbf{A}\,.\,\nabla$ (ب) أعطى المعنى الكيه $(\mathbf{A}\,.\,\nabla)\,\mathbf{B}$ (جـ) هل ممكن كتابته كالآتى $\mathbf{A}\,.\,\nabla\mathbf{B}$ بدون ليس (ابهام) ؟

(ا) ليكن $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ إذن ، بصيغتها

$$\mathbf{A}\cdot\nabla = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})$$

$$= A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

كمامل مؤثر . كمثال

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = (A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z})\phi = A_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + A_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

لاحظ أن هذه الكيه مثل الكية $\mathbf{A}\,.\,\nabla\phi$

(ب) باستخدام (ا) واستبدال ϕ بالمتجه $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = (A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{B} = A_1\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + A_2\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} + A_3\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}$$

$$= (A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial z})\mathbf{i} + (A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial z})\mathbf{j} + (A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial z})\mathbf{k}$$

(جـ) استخدم التعليل الذى أعطى فى المسألة ٣٤ لنتيجة $\nabla\mathbf{B}$ إذن تبعا للرموز التى استخدمت فى المسألة ٣٥

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\nabla\mathbf{B} = A_1\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_2\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_3\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{B}$$

$$= A_1(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{k}) + A_2(\frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{k}) + A_3(\frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{k})$$

التى تعطى نفس النتيجة كالتى أعطيت فى الجزء (ب) . ومنها يأتى

أن $\mathbf{(A.\nabla)B = A.\nabla B}$ بدون التباس (غموض) أعطيت

فكرة الثنائيات بخواصها كما وضح .

٣٧ – إذا كان $\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x^2\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$ and $\phi = 2x^2yz^3$ أوجد

(أ) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$ (ب) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ (جـ) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$ (د) $\mathbf{A}\times\nabla\phi$

(أ)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi &= \left[(2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi \\
&= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3) \\
&= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3) \\
&= (2yz)(4xyz^3) - (x^2y)(2x^2z^3) + (xz^2)(6x^2yz^2) \\
&= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4
\end{aligned}
$$

(ب)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\nabla\phi &= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k})\cdot(4xyz^3\mathbf{i} + 2x^2z^3\mathbf{j} + 6x^2yz^2\mathbf{k}) \\
&= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4
\end{aligned}
$$

بالمقارنة بـ (أ) وضح النتيجة $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi$

(جـ)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} &= \left[(x^2\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\mathbf{A} \\
&= \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} = x^2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + yz\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} - xy\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} \\
&= x^2(-2xy\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + yz(2z\,\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}) - xy(2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{k}) \\
&= (2yz^2 - 2xy^2)\mathbf{i} - (2x^3y + x^2yz)\mathbf{j} + (x^2z^2 - 2x^2yz)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

بمقارنة هذه مع $\mathbf{B}.\nabla\mathbf{A}$ أنظر مسألة (٣٦ – جـ) .

(د)

$$(\mathbf{A}\times\nabla)\phi = [(2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k})\times(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\phi$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\phi$$

$$= [\mathbf{i}(-x^2y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}) + \mathbf{j}(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}) + \mathbf{k}(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x})]\phi$$

$$= -(x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} + xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x})\mathbf{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

(ه)

$$\mathbf{A}\times\nabla\phi = (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k})\times(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= (-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x})\mathbf{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

المقارنة بالمقدار (د) يوضح النتيجة $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi = \mathbf{A}\times\nabla\phi$.

الثبات :

٣٨ – نظام احداثيين متعامدين xyz و $x'y'z'$ لهم نفس نقطة الأصل يدوران بالنسبة إلى بعضهم البعض . أشتق معادلات التحول بين الأحداثيات لنقطة فى النظامين .

ليكن $\mathbf{r}'$ و $\mathbf{r}$ هى متجهات الموضع لأى نقطة فى نظامى الأحداثيات (أنظر شكل ٤–١) إذن حيث $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (1)$$

الآن لأى متجه $\mathbf{A}$ يكون (مسألة ٢٠ ، الفصل الثانى)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}'$$

إذن ليكن $\mathbf{A} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ على التوالى

$$\begin{cases} \mathbf{i} = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\,\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\,\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\,\mathbf{k}' = l_{11}\,\mathbf{i}' + l_{21}\,\mathbf{j}' + l_{31}\,\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')\,\mathbf{i}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\,\mathbf{j}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')\,\mathbf{k}' = l_{12}\,\mathbf{i}' + l_{22}\,\mathbf{j}' + l_{32}\,\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')\,\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')\,\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\,\mathbf{k}' = l_{13}\,\mathbf{i}' + l_{23}\,\mathbf{j}' + l_{33}\,\mathbf{k}' \end{cases} \quad (٢)$$

بالتعويض بالمعادلة (٢) فى (١) ومساواة معاملات $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ نجـد أن

$$x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \qquad y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, \qquad z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \quad (٣)$$

وهى معادلات التحول المطلوبة .

٣٩ – أثبت

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k} \end{aligned}$$

لأى متجه $\mathbf{A}$ ليكن $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$

إذن ليكن $\mathbf{A} = \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ على التوالى

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k} = l_{11}\,\mathbf{i} + l_{12}\,\mathbf{j} + l_{13}\,\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k} = l_{21}\,\mathbf{i} + l_{22}\,\mathbf{j} + l_{23}\,\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k} = l_{31}\,\mathbf{i} + l_{32}\,\mathbf{j} + l_{33}\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

٤٠ – أثبت أن $\sum_{p=1}^{3} l_{pm}\, l_{pn} = 1$ if $m = n$, and 0 if $m \neq n$ حيث أن m, n يمكن أن تأخذ أيا من القيم $1, 2, 3$.

من المعادلات (٢) فى المسألة ٣٨ .

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}') \\ &= l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}') \\ &= l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}') \\ &= l_{11}l_{13} + l_{21}l_{23} + l_{31}l_{33} \end{aligned}$$

هذه المعادلات تنشئ النتيجة المطلوبة حيث $m = 1$. باعتبار $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}, \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}, \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}, \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}, \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}$ and $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ يمكن اثبات النتيجة لقيم $m = 2,\ m = 3$

بكتابة $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ if } m=n \\ 0 \text{ if } m\neq n \end{cases}$ the result can be written $\sum_{p=1}^{3} l_{pm}\, l_{pn} = \delta_{mn}$

الرمز δ_{mn} يسمى رمز كرونيكر

٤١ – اذا كانت $\phi(x, y, z)$ كية عددية ثابتة . بالنسبة لدوران المحاور . أثبت أن انحدار ϕ يكون متجها ثابتا تحت هذا الدوران .

من الفرض $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$ وللحصول على النتيجة المطلوبة لابد من اثبات أن

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\mathbf{i}' + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\mathbf{j}' + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\mathbf{k}'$$

باستخدام قانون السلسلة ومعادلات التحول (٣) التى فيها المسألة ٣٨ نجـد أن

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{11} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{21} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{31}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{12} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{22} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{32}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{13} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{23} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{33}$$

بضرب هذه المعادلات بالكيات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ على الترتيب والجمع واستخدام مسألة ٣٩ يمكن الحصول على النتيجة المطلوبة .

مسائل متنوعة

٤٢ – إذا كان $\phi = 2xz^4 - x^2y$. أوجد $\nabla\phi$ و $|\nabla\phi|$ عند النقطة $(2, -2, -1)$

الجواب : $10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k},\ 2\sqrt{93}$

٤٣ – إذا كان $\phi = 2z - x^3y$ و $\mathbf{A} = 2x^2\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ أوجـد $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ ، $\mathbf{A}\times\nabla\phi$

عند النقطة $(1, -1, 1)$ الجواب : $5,\ 7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

٤٤ – إذا كان $G = 2x^2y - xy^2$ و $F = x^2z + e^{y/x}$ (ا) أوجد $\nabla(F+G)$ (ب) $\nabla(FG)$

عند النقطة $(1, 0, -2)$ الجواب (ا) $-4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (ب) $-8\mathbf{j}$

٤٥ – أوجـد $\nabla|\mathbf{r}|^3$ الجواب $3r\,\mathbf{r}$.

٤٦ – أثبت $\nabla f(r) = \frac{f'(r)\,\mathbf{r}}{r}$

٤٧ – أحسب $\nabla(3r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{\sqrt[3]{r}})$ الجواب $(6 - 2r^{-3/2} - 2r^{-7/3})\,\mathbf{r}$

٤٨ – إذا كان $\nabla U = 2r^4\mathbf{r}$. أوجـد U الجواب $r^6/3 +$ ثابت

٤٩ – أوجـد $\phi(r)$ بحيث أن $\nabla\phi = \frac{\mathbf{r}}{r^5}$ and $\phi(1) = 0$ الجواب $\phi(r) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{r^3})$

٥٠ – أوجـد $\nabla\psi$ حيث $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)\, e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ الجواب $(2 - r)\, e^{-r}\, \mathbf{r}$

٥١ – إذا كان $\nabla\phi = 2xyz^3\,\mathbf{i} + x^2z^3\,\mathbf{j} + 3x^2yz^2\,\mathbf{k}$ أوجـد $\phi(x, y, z)$ إذا كان $\phi(1, -2, 2) = 4$

الجواب $\phi = x^2yz^3 + 20$

٥٢ – إذا كان $\nabla\psi = (y^2 - 2xyz^3)\,\mathbf{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\,\mathbf{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\,\mathbf{k}$ أوجـد ψ

الجواب $\psi = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + (3/2)z^4 +$ ثابت

٥٣ – إذا كانت U دالة قابلة للتفاضل عند x, y, z أثبت أن $\nabla U \cdot d\mathbf{r} = dU$

٥٤ – إذا كانت F دالة قابلة للتفاضل عند x, y, z, t حيث x, y, z دوال قابلة للتفاضل فى t أثبت أن

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

٥٥ – إذا كان $\mathbf{A}$ متجها ثابتا . أثبت $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}$

٥٦ – إذا كان $\mathbf{A}(x,y,z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ بين أن $d\mathbf{A} = (\nabla A_1 \cdot d\mathbf{r})\,\mathbf{i} + (\nabla A_2 \cdot d\mathbf{r})\,\mathbf{j} + (\nabla A_3 \cdot d\mathbf{r})\,\mathbf{k}$

٥٧ – أثبت $\nabla\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G\nabla F - F\nabla G}{G^2}$ if $G \neq 0$

٥٨ – أوجـد وحدة المتجه العمودى على سطح الجسم المكافى الدورانى (الناتج من دوران قطع مكافئ) $z = x^2 + y^2$ عند

النقطة $(1, 2, 5)$ الجواب $\frac{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\pm\sqrt{21}}$

٥٩ – أوجد الوحدة العمودية المرسومة على السطح $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ الخارج عند النقطة $(3, 1, -4)$

الجواب $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

٦٠ – أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $xz^2 + x^2y = z - 1$ عند النقطة $(1, -3, 2)$

الجواب $2x - y - 3z + 1 = 0$

٦١ – أوجد معادلات المستوى المماس العمودى للسطح $z = x^2 + y^2$ عند النقطة $(2, -1, 5)$

الجـواب $4x - 2y - z = 5,\ \frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 5}{-1}$ أو $x = 4t + 2,\ y = -2t - 1,\ z = -t + 5$

٦٢ – أوجـد المشتقة الاتجاهية الكية $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ عند $(2, -1, 2)$ فى اتجاه $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

الجواب $376/7$

٦٣ – أوجـد المشتقة الاتجاهية للكية $p = 4e^{2x-y+z}$ عند النقطة $(1, 1, -1)$ فى اتجاه النقطة $(-3, 5, 6)$
الإجابة $-20/9$

٦٤ – فى أى اتجاه من النقطة $(1, 3, 2)$ تكون المشتقة الاتجاهية للكية $\phi = 2xz - y^2$ أكبر ما يمكن ؟ ما هى قيمة أكبر كية ؟ الجواب : فى اتجاه المتجه $4i - 6j + 2k,\ 2\sqrt{14}$

٦٥ – أوجد قيمة الثوابت a, b, c بحيث أن المشتقة الاتجاهية للكية $\phi = axy^2 + byz + cz^2x^3$ عند النقطة $(1, 2, -1)$ لها قيمة عظمى تساوى 64 فى اتجاه يوازى محور z الجواب $a = 6, b = 24, c = -8$

٦٦ – أوجد الزاوية الحادة بين السطحين $xy^2z = 3x + z^2$ and $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ عند النقطة $(1, -2, 1)$
الجواب $\arccos \dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{14} = 79°55'$

٦٧ – أوجد الثوابت a, b حيث أن السطح $ax^2 - byz = (a+2)x$ يكون عمودياً على السطح $4x^2y + z^3 = 4$ عند النقطة $(1, -1, 2)$ الجواب $a = 5/2, b = 1$

٦٨ – (أ) ليكن u, v دوال قابلة للتفاضل فى x, y, z بين أن الشرط اللازم والكافى لكى تكون u, v دوال مرتبطة بالمعادلة $F(u, v) = 0$ بحيث أن $\nabla u \times \nabla v = 0$.
(ب) بين إذا كان $v = \dfrac{x+y}{1-xy}$ و $u = \arctan x + \arctan y$ تكون دوال مرتبطة
الجواب (ب) $v = \tan u)$

٦٩ – (أ) بين أن الشرط اللازم والكافى لأن يكون $u(x,y,z), v(x,y,z)$ و $w(x,y,z)$ دوال مرتبطة بالمعادلة $F(u,v,w) = 0$ يكون $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$
(ب) عبر عن $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w$ فى صيغة محدد . يسمى هذا المحدد الجاكوبيان للكيات u, v, w بالنسبة إلى x, y, z وتكتب كالآتى $J\left(\dfrac{u,v,w}{x,y,z}\right)$ أو $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$
(جـ) أوجد إذا كان $u = x + y + z,\ v = x^2 + y^2 + z^2$ و $w = xy + yz + zx$ تكون دوال مرتبطة

الجواب (ب) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$ (جـ) Yes $(u^2 - v - 2w = 0)$

٧٠ – إذا كان $\phi = 3x^2 - yz$ و $A = 3xyz^2 i + 2xy^3 j - x^2yz k$ أوجد (أ) $A \cdot \nabla$ (ب) $A \cdot \nabla\phi$ (جـ) $\nabla \cdot (\phi A)$ (د) $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ عند النقطة $(1, -1, 1)$. الإجابة (أ) 4 (ب) -15 (جـ) 1 (د) 6

٧١ – احسب $\text{div}\,(2x^2z\,\mathbf{i} - xy^2z\,\mathbf{j} + 3yz^2\,\mathbf{k})$ الجواب $4xz - 2xyz + 6yz$

٧٢ – إذا كان $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ أوجد $\Delta^2\phi$ الجواب $6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2z$

٧٣ – احسب $\nabla^2(\ln r)$ الجواب $1/r^2$

٧٤ – أثبت أن $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ حيث n عدد ثابت

٧٥ – إذا كان $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$ أوجد $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ عند النقطة $2, -1, 0$

الإجابة $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$

٧٦ – إذا كان $\boldsymbol{\omega}$ متجهاً ثابتاً $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ أثبت أن $\text{div}\,\mathbf{v} = 0$

٧٧ – أثبت $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla^2\phi$

٧٨ – إذا كان $U = 3x^2y,\ V = xz^2 - 2y$ احسب $\text{grad}\,[(\text{grad}\,U)\cdot(\text{grad}\,V)]$.

الجواب $(6yz^2 - 12x)\mathbf{i} + 6xz^2\mathbf{j} + 12xyz\,\mathbf{k}$

٧٩ – احسب $\nabla\cdot(r^3\mathbf{r})$ الجواب $6r^3$

٨٠ – احسب $\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$ الجواب $3r^{-4}$

٨١ – احسب $\nabla^2[\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^2)]$ الجواب $2r^{-4}$

٨٢ – إذا كان $\mathbf{A} = \mathbf{r}/r$. أوجد إنحدار الالتفاف للمتجه $\mathbf{A}$ الجواب $-2r^{-3}\mathbf{r}$

٨٣ – أثبت أن (أ) $\nabla^2 f(r) = \dfrac{d^2f}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$ (ب) أوجد $f(r)$ بحيث أن $\nabla^2 f(r) = 0$

الجواب $f(r) = A + B/r$ حيث A ، B ثوابت اختيارية

٨٤ – أثبت أن المتجه $\mathbf{A} = 3y^4z^2\,\mathbf{i} + 4x^3z^2\,\mathbf{j} - 3x^2y^2\,\mathbf{k}$ يكون لولبياً

٨٥ – بين أن $\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\mathbf{i} + (3x^3y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\mathbf{k}$ لا يكون لولبياً ولكن $\mathbf{B} = xyz^2\mathbf{A}$ تكون لولبية

٨٦ – أوجد الدالة القابلة للتفاضل الأكثر عموماً $f(r)$ بحيث أن $f(r)\,\mathbf{r}$ تكون لولبية . الجواب $f(r) = C/r^3$ حيث C عدد اختيارى ثابت

٨٧ – بين أن المجال المتجهى $\mathbf{V} = \dfrac{-x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ يكون « مجال مصبيا » ارسم وأعطى تعليلا فيزيائيا .

٨٨ – إذا كان $V, \ U$ مجالى عددين قابلين للتفاضل أثبت أن $\nabla U \times \nabla V$ يكون لولبية

٨٩ – إذا كان $\phi = x^2yz$ و $\mathbf{A} = 2xz^2\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + 3xz^3\,\mathbf{k}$ أوجد

(أ) $\nabla + \mathbf{A}$ (ب) $\text{curl}\,(\phi\,\mathbf{A})$ (ﺟ) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ (د) $\Delta\,[\mathbf{A}.\text{curl}\,\mathbf{A}]$

(ﻫ) $\text{curl grad}\,(\phi\,\mathbf{A})$ عند النقطة $(1, 1, 1)$

الجواب (أ) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (ب) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (ﺟ) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ (د) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ (ﻫ) 0

٩٠ – إذا كان $F = x^2yz, \ G = xy - 3z^2$ أوجد (أ) $\nabla\,[\,(\Delta F).(\nabla G)\,]$ (ب) $\nabla.[\nabla F) \times (\nabla G)\,]$

(ﺟ) $\nabla \times [\,(\nabla F) \times (\nabla G)\,]$

الإجابة (أ) $(2y^2z + 3x^2z - 12xyz)\mathbf{i} + (4xyz - 6x^2z)\mathbf{j} + (2xy^2 + x^3 - 6x^2y)\mathbf{k}$

(ب) 0

(ﺟ) $(x^2z - 24xyz)\mathbf{i} - (12x^2z + 2xyz)\mathbf{j} + (2xy^2 + 12yz^2 + x^3)\mathbf{k}$

٩١ – أحسب $|\nabla \times (\mathbf{r}/r^2)$ الإجابة 0

٩٢ – لأى قيمة للثابت a يكون المتجه $\mathbf{A} = (axy - z^3)\,\mathbf{i} + (a-2)x^2\,\mathbf{j} + (1-a)xz^2\,\mathbf{k}$ له التفاف يساوى الصفر ؟

الجواب $a = 4$

٩٣ – أثبت أن $\text{cur l}\,(\phi \text{ gard } \phi) = 0$

٩٤ – ارسم مجالات المتجه $\mathbf{A} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ and $\mathbf{B} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$ واحسب التباعد والالتفاف لكل متجه فى المجال واشرح المعنى الفيزيائى للنتيجة التى حصلت عليها .

٩٥ – إذا كان $\mathbf{B} = y^2\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = x^2z\,\mathbf{i} + yz^3\,\mathbf{j} - 3xy\,\mathbf{k}$, $\phi = 2x^2 + yz$ أوجد

(أ) $\mathbf{A}.(\nabla\phi)$ (ب) $(\mathbf{A}.\nabla)\,\phi$ (ﺟ) $(\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B}$ (د) $\mathbf{B}(\mathbf{A}.\nabla)$ (ﻫ) $(\nabla.\mathbf{A})\mathbf{B}$

الإجابة (أ) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$ (ب) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$ (مثل (أ))

(ﺟ) $2y^2z^3\,\mathbf{i} + (3xy^2 - yz^4)\mathbf{j} + 2x^2z\,\mathbf{k}$

(د) the operator $(x^2y^2z\,\mathbf{i} - x^2yz^2\,\mathbf{j} + 2x^3z\,\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial x} + (y^3z^3\,\mathbf{i} - y^2z^4\,\mathbf{j} + 2xyz^3\,\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial y}$

$+ (-3xy^3\,\mathbf{i} + 3xy^2z\,\mathbf{j} - 6x^2y\,\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial z}$

(ﻫ) $(2xy^2z + y^2z^3)\mathbf{i} - (2xyz^2 + yz^4)\mathbf{j} + (4x^2z + 2xz^3)\mathbf{k}$

٩٦ – إذا كان $\phi = xyz$, $\mathbf{A} = yz^4\,\mathbf{i} - 3xz^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}, \ \mathbf{B} = 3x\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$ أوجد

(أ) $\mathbf{A} + (\nabla\phi)$ (ب) $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi$ (ﺟ) $(\Delta \times .\mathbf{A}) \times \mathbf{B}$ (د) $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$

الإجابة (أ) $-5x^2yz^2\,\mathbf{i} + xy^2z^2\,\mathbf{j} + 4xyz^3\,\mathbf{k}$ (مثل (أ))

(ب) $-5x^2yz^2\,\mathbf{i} + xy^2z^2\,\mathbf{j} + 4xyz^3\,\mathbf{k}$

(ﺟ) $24x^2z + 4xyz^2$ (د) $16z^3\,\mathbf{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\mathbf{j} + 32xz^2\,\mathbf{k}$

٩٧ – أوجد $A\times(\nabla\times B)$ and $(A\times\nabla)\times B$ عند النقطة $(1, -1, 2)$

إذا كان $B = 3xz\,i + 2yz\,j - z^2 k$ و $A = xz^2 i + 2y\,j - 3xz\,k$

الجواب $A\times(\nabla\times B) = 18i - 12j + 16k,\quad (A\times\nabla)\times B = 4j + 76k$

٩٨ – أثبت $(v\cdot\nabla)v = \frac{1}{2}\nabla v^2 - v\times(\nabla\times v)$

٩٩ – أثبت $\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B)$

١٠٠ – أثبت $\nabla\times(A\times B) = (B\cdot\nabla)A - B(\nabla\cdot A) - (A\cdot\nabla)B + A(\nabla\cdot B)$

١٠١ – أثبت $\nabla(A\cdot B) = (B\cdot\nabla)A + (A\cdot\nabla)B + B\times(\nabla\times A) + A\times(\nabla\times B)$

١٠٢ – بين أن $A = (6xy + z^3)i + (3x^2 - z)j + (3xz^2 - y)k$ تكون غير دورانية أوجد ϕ بحيث أن $A = \nabla\phi$

الجواب $\phi = 3x^2y + xz^3 - yz + \text{constant}$

١٠٣ – بين أن $E = r/r^2$ تكون غير دورانية . أوجد ϕ بحيث أن $E = -\nabla\phi$ حيث $\phi(a) = 0$ عندما $a > 0$

الجواب $\phi = \ln(a/r)$

١٠٤ – إذا كان A, B متجهات غير دورانية . أثبت أن $A\times B$ تكون لولبية .

١٠٥ – إذا كان $f(r)$ قابلة للتفاضل ، أثبت أن $f(r)r$ تكون غير دورانية .

١٠٦ – هل يوجد دالة قابلة للتفاضل V بحيث أن (أ) $\text{curl}\,V = r$ (ب) $\text{curl}\,V = 2i + j + 3k$؟ إذا كان ذلك ، أوجد V الجواب (أ) لا (ب) $V = 3x\,j + (2y - x)k + \nabla\phi$ حيث ϕ دالة مزدوجة قابلة للتفاضل اختيارية .

١٠٧ – بين أن حل معادلة ماكسويل هي

$$\nabla\times H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},\quad \nabla\times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},\quad \nabla\cdot H = 0,\quad \nabla\cdot E = 4\pi\rho$$

حيث ρ دالة فى x, y, z و c سرعة الضوء بفرض أنها ثابتة تعطى بالعلاقة

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t},\quad H = \nabla\times A$$

حيث A و ϕ تسمى جهد المتجه والجهد العدوى على الترتيب وتحقق المعادلات

$$(١)\ \nabla\cdot A + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (٢)\ \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (٣)\ \nabla^2 A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

١٠٨ – (أ) أعطيت الثنائى $\Phi = ii + jj + kk$ احسب $r\cdot(\Phi\cdot r)$ and $(r\cdot\Phi)\cdot r$ (ب) هل يوجد التباس فى كتابة $r\cdot\Phi\cdot r$ ؟ (ج) ماهى $r\cdot\Phi\cdot r = 1$ مثل بيانياً ؟

الجواب (أ) $r\cdot(\Phi\cdot r) = (r\cdot\Phi)\cdot r = x^2 + y^2 + z^2$ (ب) لا (ج) كرة نصف قطرها واحد ومركزها عند النقطة الأصل .

١٠٩ – (أ) إذا كان $B = 2z^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j} + y^3\,\mathbf{k}$ و $A = xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$ أعطى المعنى الممكن للكمية $(\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{B}$ عند النقطة $(1, -1, 1)$.

(ب) هل من الممكن كتابة النتيجة فى الصورة $\mathbf{A} \times (\nabla \mathbf{B})$ باستخدام الثنائى ؟

الجواب (أ) $-4\mathbf{ii} - \mathbf{ij} + 3\mathbf{ik} - \mathbf{jj} - 4\mathbf{ji} + 3\mathbf{kk}$

(ب) نعم ، إذا كانت العملية قد أدت .

١١٠ – أثبت أن $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ تكون عددياً ثابتاً تحت دوران المحاور .

١١١ – إذا كان $\mathbf{A}(x, y, z)$ مجالا متجهاً قابل التفاضل ثابتاً بالنسبة لدوران المحاور . أثبت أن (أ) $\operatorname{div} \mathbf{A}$ و (ب) $\operatorname{curl} \mathbf{A}$ يكونوا ثوابت مجال عددية وثوابت مجال متجهى على الترتيب تحت التحول .

١١٢ – حل المعادلات (٣) للمسائل المحلولة ٣٨ لقيم x, y, z بدلالة x', y', z'

الجواب $x = l_{11}x' + l_{21}y' + l_{31}z', \quad y = l_{12}x' + l_{22}y' + l_{32}z', \quad z = l_{13}x' + l_{23}y' + l_{33}z'$

١١٣ – إذا كان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ثوابت تحت تأثير الدوران بين أن $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ يكونوا أيضاً ثوابت

١١٤ – بين أنه تحت تأثير الدوران

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'} = \nabla'$$

١١٥ – بين أن عامل لابلاس يكون ثابت تحت تأثير الدوران .

الفصل الخامس

تكامل المتجه

التكاملات العادية للمتجهات : ليكن $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ متجه يتوقف على كية عددية فردية متغيرة u حيث $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$.

افتراضياً مستمرة فى فترة معينة . أذن

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \mathbf{i}\int R_1(u)\,du + \mathbf{j}\int R_2(u)\,du + \mathbf{k}\int R_3(u)\,du$$

يسمى تكامل غير محدد للمقدار $\mathbf{R}(u)$. إذا وجد متجه $\mathbf{S}(u)$ بحيث أن $\mathbf{R}(u) = d/du\,(\mathbf{S}(u))$ ، حينئذ

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c}$$

حيث $\mathbf{c}$ متجه ثابت اختيارى غير متوقف على u .

التكامل المحدد بين النهايات $u = a$ و $u = b$ يمكن كتابته فى هذه الحالة كالآتى :

$$\int_a^b \mathbf{R}(u)\,du = \int_a^b \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c}\Big|_a^b = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

هذا التكامل يمكن أيضاً تعريفه كنهاية لمجموع بطريقة مشابهة لما هو فى حالة حساب التكامل الابتدائى .

التكاملات الخطية : ليكن $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ حيث $\mathbf{r}(u)$ متجه موضعى لـ (x, y, z) المعرف لمنحنى C الذى يصل النقطتين P_1 ، P_2 حيث $u = u_1$ ، $u = u_2$ على الترتيب .

نفترض أن C تتكون من عدد محدد من المنحنيات وكل منها له المتجه $\mathbf{r}(u)$ وله مشتقة مستمرة .

ليكن $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ دالة متجه لموضع محدد ومستمر على طول C . حينئذ يكون التكامل للمركبة المماسية للمتجه $\mathbf{A}$ على طول C من النقطة P_1 إلى P_2 يكتب كالآتى :

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

هذا مثال التكامل الخطى . إذا كانت $\mathbf{A}$ هى القوة $\mathbf{F}$ المؤثرة على جسم يتحرك على C . هذا التكامل الخطى يمثل الشغل المبذول بهذه القوة . إذا كانت C منحنى مغلق (حيث نفترض أنه منحنى مغلق بسيط أى أن المنحنى لا يقطع نفسه ، فى أى مكان) التكامل حول C أحياناً يبين كالآتى :

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

فى ديناميكا الطيران وميكانيكا الموائع هذا التكامل يسمى دوران المتجه $\mathbf{A}$ على C حيث $\mathbf{A}$ تمثل سرعة المائع .

وعموماً أى تكامل يراد حسابه على طول منحنى يسمى تكامل خطياً . مثل هذه التكاملات يمكن تعريفها بدلالة نهايات مجاميع (Sums) كما فى حساب التكاملات الأولية .

لطرق حساب التكاملات الخطية أنظر المسائل المحلولة .

النظرية الآتية هامة :

نظرية : إذا كان $\mathbf{A} = \nabla \phi$ فى أى منطقة R فى الفراغ ، معرفة بالفترات $a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2$ و $c_1 \leqq z \leqq c_2$ حيث $\phi(x, y, z)$ وحيدة القيمة ولها مشتقة مستمرة فى R حينئذ .

١ - $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ غير معتمدة على المسار C فى المنطقة R التى تصل بين P_1 و P_2 .

٢ - $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ حول أى منحنى مغلق C فى R .

فى مثل هذه الحالة $\mathbf{A}$ تسمى مجالا متحفظاً وأن ϕ هى الجهد العددى .

مجال المتجه $\mathbf{A}$ يكون متحفظاً إذا كان فقط $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ أو معادلا $\mathbf{A} = \nabla \phi$. فى مثل هذه الحالة $\mathbf{A}.d\mathbf{r} = A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = d\phi$ تفاضل مضبوط . أنظر مسائل ١٠ - ١٤ .

تكاملات السطح : ليكن S سطح له جانبان كما مبين فى شكل ٥ - ١ ليكن أحد جوانب السطح S أختير كجانب موجب (إذا كان S سطح مغلق وقد أخذ على أنه الجانب الخارجى) . الوحدة العمودية $\mathbf{n}$ إلى أى نقطة للجانب الموجب للسطح S تسمى الوحدة العمودية الموجبة أو الوحده العمودية المرسومة للخارج .

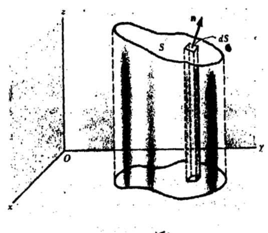
ربط هذا بتفاضل مساحة سطح dS متجه $d\mathbf{S}$ الذى له المقدار dS وله نفس اتجاه $\mathbf{n}$ حينئذ $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$. التكامل

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

كمثال لتكامل السطح ويسمى تدفق (*flux*) المتجه $\mathbf{A}$ فوق S . تكاملات أخرى سطحية هى،

$$\iint_S \phi\,dS,\quad \iint_S \phi\,\mathbf{n}\,dS,\quad \iint_S \mathbf{A}\times d\mathbf{S}$$

حيث ϕ تكون دالة عددية . مثل هذه التكاملات يمكن تعريفها بدلالة نهايات مجاميع كما فى حالة التكاملات الأولية (أنظر المسألة ١٧) .



شكل ٥ - ١

الرمز $\oiint_S$ فى بعض الأحيان يستعمل لتبين التكامل على السطح المغلق S . كى يمنع أى تداخل فى التعريف $\oint_S$ الذى يمكن أيضاً استعماله .

لحساب تكاملات السطح . يكون من الملائم التعبير عنها كتكامل ثنائى مأخوذ على المساحة المسقطة للسطح S على أحد مستويات الأحداثيات . هذا ممكن لو أن أى خطا متعامداً على مستوى الأحداثى المختار يلاقى السطح فى نقطة واحدة . على كل حال فهذا لا يمثل مشكلة حقيقية حيث يمكن عموماً تقسيم السطح S إلى أسطح تحقق هذا التحديد .

تكاملات الحجم : اعتبر سطحاً مغلقاً فى الفراغ يحتوى حجم V حينئذ

$$\iiint_V \mathbf{A}\, dV \quad \text{and} \quad \iiint_V \phi\, dV$$

أمثلة من تكاملات الحجم أو تكاملات الفراغ كما تسمى فى بعض الأحيان لحساب مثل هذه التكاملات أنظر المسائل المحلولة .

مسائل محلولة

١ – إذا كان $\mathbf{R}(u) = (u-u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ أوجد (أ) $\int \mathbf{R}(u)\,du$ و (ب) $\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du$

(أ)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{R}(u)\,du &= \int \left[(u-u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right]du \\ &= \mathbf{i}\int (u-u^2)\,du + \mathbf{j}\int 2u^3\,du + \mathbf{k}\int -3\,du \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + c_1\right) + \mathbf{j}\left(\frac{u^4}{2} + c_2\right) + \mathbf{k}(-3u + c_3) \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + \mathbf{c}\end{aligned}$$

حيث $\mathbf{c}$ متجه ثابت $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

(ب) من (أ)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + \mathbf{c}\,\Big|_1^2 \\ &= \left[\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{2^4}{2}\mathbf{j} - 3(2)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] - \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{1^4}{2}\mathbf{j} - 3(1)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] \\ &= -\frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{15}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

طريقة أخـــــرى :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du &= \mathbf{i}\int_1^2 (u-u^2)\,du + \mathbf{j}\int_1^2 2u^3\,du + \mathbf{k}\int_1^2 -3\,du \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^2 + \mathbf{j}\left(\frac{u^4}{2}\right)\Big|_1^2 + \mathbf{k}(-3u)\Big|_1^2 = -\frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{15}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

٢ – عجلة جسيم عند أى زمن $t \geq 0$ تعطى بالعلاقة

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 12\cos 2t\,\mathbf{i} - 8\sin 2t\,\mathbf{j} + 16t\,\mathbf{k}$$

إذا كانت السرعة $\mathbf{v}$ والإزاحة $\mathbf{r}$ هما صفر عند $t = 0$ أوجد $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ عند أى زمن .

كامل

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\int 12\cos 2t\, dt + \mathbf{j}\int -8\sin 2t\, dt + \mathbf{k}\int 16t\, dt$$
$$= 6\sin 2t\,\mathbf{i} + 4\cos 2t\,\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

بوضع $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ عندما $t = 0$ نجد أن $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_1 = -4\mathbf{j}$

حينئذ $\mathbf{v} = 6\sin 2t\,\mathbf{i} + (4\cos 2t - 4)\,\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k}$

لذلك $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 6\sin 2t\,\mathbf{i} + (4\cos 2t - 4)\,\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k}$

كامل

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\int 6\sin 2t\, dt + \mathbf{j}\int (4\cos 2t - 4)\, dt + \mathbf{k}\int 8t^2\, dt$$
$$= -3\cos 2t\,\mathbf{i} + (2\sin 2t - 4t)\,\mathbf{j} + \frac{8}{3}t^3\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

ضع $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ عندما $t = 0$

$$\mathbf{0} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_2 \quad , \quad \mathbf{c}_2 = 3\mathbf{i}$$

حينئذ

$$\mathbf{r} = (3 - 3\cos 2t)\mathbf{i} + (2\sin 2t - 4t)\mathbf{j} + \frac{8}{3}t^3\mathbf{k}$$

٣ - احسب $\displaystyle\int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\, dt$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

كامل

$$\int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\, dt = \int \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) dt = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}$$

٤ - معادلة الحركة لجسيم P كتلته m تعطى بالعلاقة

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r}_1 \text{ ،}$$

حيث $\mathbf{r}$ هو المتجه الموضعى للجسيم P مقاس من نقطة الأصل O و $\mathbf{r}_1$ وحدة متجه فى اتجاه $\mathbf{r}$ و $f(r)$ دالة المسافة للجسيم P من O

(أ) بين أن $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = \mathbf{c}$ حيث $\mathbf{c}$ متجه ثابت .

(ب) علل فيزيائياً الحالات $f(r) < 0$ و $f(r) > 0$.

(جـ) علل نتيجة (أ) هندسياً

(د) أذكر كيف تحصل على النتائج التى تربط حركة الكواكب فى مجموعتنا الشمسية .

(أ) أضرب كلا من الجانبين فى $m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r}_1$ فى $\mathbf{r}$ حينئذ

$$m\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$$

حيث $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_1$ متجهات تقع فى نفس المستوى وأيضاً $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = 0$ لذلك

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}) = 0$$

كامل $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = \mathbf{c}$ حيث $\mathbf{c}$ متجه ثابت (قارن بالمسألة ٣) .

(ب) إذا كان $f(r) < 0$ العجلة $d^2\mathbf{r}/dt^2$ لها الاتجاه المعاكس للمتجه $\mathbf{r}_1$ حينئذ تكون القوة فى اتجاه O والجسيم يكون دائما منجذب فى اتجاه O ..

إذا كان $f(r) > 0$ دائما تكون القوة متجهة بعيدا عن O والجسيم يكون تحت تأثير القوة التنافرية عند O

القوة المتجهة إلى أو بعيدا عن نقطة ثابتة O ولها المقدار المتوقف فقط على المسافة r من O تسمى قوة مركزية .

(جـ) فى زمن Δt يتحرك الجسيم من M إلى N (شكل ٥-٢) المساحة المجتازة خارجيا بمتجه الموضع لهذا الزمن تقريبا تساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع الذى جوانبه $\mathbf{r}$ و $\Delta\mathbf{r}$ أو $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}$.حينئذ المساحة التقريبية المزاحة خارجيا بمتجه نصف القطر لكل وحدة زمن هو $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ حينئذ الزمن اللحظى لمعدل التغير فى المساحة يكون

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

شكل ٥ - ٢

حيث $\mathbf{v}$ هى السرعة اللحظية للجسيم

الكمية $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ تسمى السرعة المساحية من الجزء (أ)

$$\text{السرعة المساحية} = \mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{ثابت}$$

حيث $\mathbf{r}.\mathbf{H} = 0$ تأخذ الحركة مكانها فى المستوى الذى يمكن أن يكون المستوى xy كما بشكل ٥-٢ .

(د) كوكب (مثل كوكب الأرض) ينجذب إلى الشمس تبعا لقانون نيوتن العام للجاذبية ، والذى يذكر أن أى جسمين ذو كتل m و M على الترتيب ينجذبان كل منهما للآخر بقوة مقدارها $F = \frac{GMm}{r^2}$ حيث r هى المسافة بين الجسمين وأن G ثابت عام . ليكن m ، M كتل الكواكب والشمس على الترتيب . ثم أختر مجموعة محاور أحداثيات بحيث أن نقطة الأصل O تكون عند الشمس . إذن معادلة حركة الكوكب هى

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \quad \text{or} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1$$

بفرض أن تأثير الكواكب الأخرى مهملة .

تبعا للجزء (د) كوكب يتحرك حول الشمس بحيث أن متجه الموضعى يجتاز مساحات متساوية فى أزمنة متساوية . هذه النتيجة والمسألة ٥ هى اثنان من ثلاثة قوانين مشهورة لكيلر والتى استنتجت عمليا من مجموعة

من المعلومات التى جمعت ووضعت بواسطة العالم الفلكى بتكوبرا هو . هذه القوانين جعلت نيوتن قادرا على صياغة قانونه العام للجاذبية . لمعرفة قانون كبلر الثالث أنظر مسألة ٣٦ .

٥ – بين أن مسار الكوكب حول الشمس يكون فى قطع ناقص والشمس تكون عند احدى البؤرتين .

من مسائل ٤ جـ ، ٤ د .

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad (١)$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{H} = \mathbf{h} \qquad (٢)$$

الآن $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_1,\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1$ بحيث أن

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} = r\,\mathbf{r}_1\times\left(r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1\right) = r^2\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \qquad (٣)$$

من (١)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1\times\mathbf{h} = -GM\,\mathbf{r}_1\times\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$

$$= -GM\left[\left(\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1)\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right] = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

باستعمال المعادلة ٣ والحقيقة أن $\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_1/dt = 0$ (مسألة ٩ جزء ٣) .

ولكن حيث $\mathbf{h}$ موجة ثابت $\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h})$ بحيث أن

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

كامل

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = GM\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}$$

ومنها

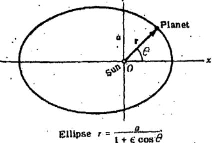
$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$$

$$= GMr + r\,\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{p} = GMr + rp\cos\theta$$

حيث $\mathbf{p}$ موجة ثابت افتراضى وله المقدار p والزاوية θ بين $\mathbf{p}$ و $\mathbf{r}_1$.

حيث $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$, we have $h^2 = GMr + rp\cos\theta$ and

$$r = \frac{h^2}{GM + p\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (p/GM)\cos\theta}$$



شكل ٥ – ٣

من الهندسة التحليلية المعادلة القطبية للقطع المخروطى التى بؤرته عند نقطة الأصل غير مركزية بالمقدار $\in$ هى $= \frac{a}{1+\epsilon\cos\theta}$ حيث a مقدار ثابت . قارن هذا مع المعادلة المستخرجة يلاحظ أن الفلك (المدار) المطلوب هو قطع مخروطى مع لا مركزية $\in = p/GM$ يكون المدار عبارة عن قطع ناقص أو مكافئ أو زائد تبعا لـ $\in$ أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد . حيث أن لمدارات الكواكب تكون لها منحنيات مغلقة فلا بد أن تكون قطعا ناقصا .

تكاملات الخط :

٦ - إذا كان $\mathbf{A} = (3x^2+6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$ أحسب $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ من النقطة $(0,0,0)$ إلى $(1,1,1)$ على المسارات C الآتية :

(أ) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ب) الخطوط المستقيمة من $(0,0,0)$ إلى $(1,1,1)$ ثم إلى $(1,1,0)$ وثم إلى $(1,1,1)$.

(جـ) الخط المستقيم الذى يربط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C [(3x^2+6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}]\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$
$$= \int_C (3x^2+6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz$$

(أ) إذا كان $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ النقط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$ المناظرة لـ $t = 0$ و $t = 1$ بالتتالى . حينئذ

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2+6t^2)\,dt - 14(t^2)(t^3)\,d(t^2) + 20(t)(t^3)^2\,d(t^3)\,.$$
$$= \int_{t=0}^{1} 9t^2\,dt - 28t^6\,dt + 60t^9\,dt$$
$$= \int_{t=0}^{1} (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big|_0^1 = 5$$

طريقة اخرى :

على طول $C,\ \mathbf{A} = 9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}$ و $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ و $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$

حينئذ
$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (9t^2\,\mathbf{i} - 14t^5\,\mathbf{j} + 20t^7\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k})\,dt$$
$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 5$$

(ب) على طول الخط المستقيم من $(0,0,0)$ إلى $(1,0,0)$ تكون $y = 0, z = 0, dy = 0\ dz = 0$ بينما x تتغير من 0 إلى 1 إذن التكامل على هذا الجزء من المسار يكون

$$\int_{x=0}^{1} (3x^2+6(0))\,dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1$$

على طول الخط المستقيم $(1,0,0)$ إلى $x = 1, z = 0, dx = 0, dz = 0$ $(1,0,0)$ بينما y تتغير من 0 إلى 1 . إذن التكامل على هذا الجزء من المسار يكون

$$\int_{y=0}^{1} (3(1)^2+6y)0 - 14y(0)\,dy + 20(1)(0)^2\,0 = 0$$

على الخط المستقيم من $(1,1,0)$ إلى $(1,1,1)$ و $x=1$ و $y=1$ و $dx=0$ و $dy=0$.
بينما z تتغير من 0 إلى 1 . حينئذ التكامل على هذا الجزء من المسار هو

$$\int_{z=0}^{1} (3(1)^2+6(1))\,0 - 14(1)\,z(0) + 20(1)\,z^2\,dz = \int_{z=0}^{1} 20z^2\,dz = \frac{20z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

بالجمع
$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

(جـ) الخط المستقيم الذى يربط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$ المعطى فى الصيغة البارامترية بواسطة $z=t$ و $y=t$
و $x=t$. حينئذ

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2+6t)\,dt - 14(t)(t)\,dt + 20(t)(t)^2\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2+6t-14t^2+20t^3)\,dt = \int_{t=0}^{1} (6t-11t^2+20t^3)\,dt = \frac{13}{3}$$

٧ – أوجد الشغل الكلى المبذول فى تحريك جسيم فى مجال قوة معطى بالعلاقة $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} + 10x\,\mathbf{k}$ على طول المنحنى $x=t^2+1,\ y=2t^2,\ z=t^3$ من $t=1$ إلى $t=2$

الشغل الكلى

$$= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (3xy\,\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} + 10x\,\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \int_C 3xy\,dx - 5z\,dy + 10x\,dz$$

$$= \int_{t=1}^{2} 3(t^2+1)(2t^2)\,d(t^2+1) - 5(t^3)\,d(2t^2) + 10(t^2+1)\,d(t^3)$$

$$= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\,dt = 303$$

٨ – إذا كان $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$ احسب $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ حيث C منحنى فى المستوى xy ، $y=2x^2$ من $(0,0)$ إلى $(1,2)$.

حيث أن التكامل المتكون فى المستوى xy عند $(z=0)$ يمكننا أن نأخذ $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ حينئذ

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j})$$

$$= \int_C 3xy\,dx - y^2\,dy$$

الطريقة الأولى : ليكن $x=t$ فى $y=2x^2$ حينئذ المعادلات البارامترية الخاصة C تكون $x=t$ و $y=2t^2$.
النقط $(0,0)$ و $(1,2)$ مناظرة لـ $t=0$ و $t=1$ على الترتيب حينئذ

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} 3(t)(2t^2)\,dt - (2t^2)^2\,d(2t^2) = \int_{t=0}^{1} (6t^3 - 16t^5)\,dt = -\frac{7}{6}$$

الطريقة الثانية : بالتعويض $y = 2x^2$ مباشرة ، حيث x تتغير من 0 إلى 1 إذن

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^{1} 3x(2x^2)\,dx - (2x^2)^2\,d(2x^2) = \int_{x=0}^{1} (6x^3 - 16x^5)\,dx = -\frac{7}{6}$$

لاحظ إذن تحرك المنحنى فى الاتجاه المعاكس . أى أن من $(1,2)$ إلى $(0,0)$ فإن قيمة التكامل يمكن أن يكون $7/6$ بدلا من $-7/6$.

٩ — أوجد الشغل المبذول لتحريك جسيم مرة واحدة حول الدائرة C فى المستوى xy . إذا كان مركز الدائرة عند نقطة الأصل ونصف قطرها ٣ . وإذا كانت قوة المجال المعطاة هى

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

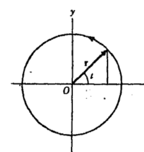
فى المستوى $z = 0$ و $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$ و $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ لذلك يكون الشغل المبذول

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C [(2x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (3x-2y)\mathbf{k}]\cdot[dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}]$$
$$= \int_C (2x - y)\,dx + (x + y)\,dy$$

أختر المعادلات البارامترية للدائرة التى هى $x = 3\cos t, y = 3\sin t$ حيث t تتغير من 0 إلى 2π شكل ٥—٤ حينئذ التكامل الخطى يساوى

$$\int_{t=0}^{2\pi} [2(3\cos t) - 3\sin t][-3\sin t]\,dt + [3\cos t + 3\sin t][3\cos t]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9\sin t\cos t)\,dt = 9t - \frac{9}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$



$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
$= 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$

شكل ٥ — ٤

فى تحريك C أخترنا اتجاه عكس عقارب الساعة كما فى شكل ٥—٤ سنسمى هذا الاتجاه موجبا أو نقول أن C قد تحركت إلى الاتجاه الموجب . إذا كانت C تحركت إلى اتجاه عقارب الساعة الاتجاه (السالب) قيمة التكامل سوف تكون (-18π).

١٠ — (ا) إذا كانت $\mathbf{F} = \nabla\phi$ حيث ϕ قيمة فردية ولها مشتقات جزئية مستمرة . بين أن الشغل المبذول فى تحريك الجسيم من نقطة واحدة $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ فى هذا المجال إلى نقطة أخرى $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ غير متوقفة على المسار الذى يربط بين النقطتين .

(ب) بالعكس إذا كانت $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ هى غير معتمدة على المسار C الذى يربط أى نقطتين — بين أنه يوجد هناك دالة ϕ مثل $\mathbf{F} = \Delta\phi$.

(أ) الشغل المبذول

$$= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

حينئذ يتوقف التكامل فقط على النقط P_1 ، P_2 وليس على المسار الذى يربط بينهما . بالطبع هذه حقيقة فقط إذا كانت $\phi(x, y, z)$ هى قيمة فردية عند كل النقط P_1 ، P_2 .

(ب) ليكن $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ من الفرض $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على مسار C الذى يربط أى نقطتين . والتى نأخذ على أنها (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) بالتتالى . حينئذ

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} F_1dx + F_2dy + F_3dz$$

غير متوقفة على مسار ربط (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) . لـذا

$$\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(x,y,z)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

حيث أن التكامل الأخير لابد أن يكون غير متوقف على مسار ربط النقطتين (x, y, z) و $(x + \Delta x, y, z)$ يمكننا اختيار المسار ليكون خطا مستقيما يربط تلك النقط بحيث أن dy و dz تكون صفرية . حينئذ

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1\,dx$$

مع أخذ النهايات لكلا الجانبين عندما $\Delta x \to 0$ يكون لدينا $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_1$

بالمثل يمكننا أن نبين أن $\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2$ و $\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_3$

حينئـذ $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$

إذا كان $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على المسار C الذى يربط P_1 و P_2 حينئذ $\mathbf{F}$ تسمى المجال التحفظى وأنها تتبع الآتى إذا كان $\mathbf{F} = \nabla\phi$ حينئذ $\mathbf{F}$ تكون تحفظية وعكسية .

برهن باستخدام الموجهات . إذا كان تكامل الخط غير متوقف على المسار . إذا

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds$$

بالتفاضل $\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ولكن $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ لذلك $(\nabla\phi - \mathbf{F})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$

حيث هذا صحيح بغض النظر عن $d\mathbf{r}/ds$ لدينا $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

١١ - (أ) إذا كان $\mathbf{F}$ مجالا تحفظيا أثبت أن $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = 0$ (أى أن $\mathbf{F}$ غير دورانية) .

(ب) عكسيا إذا كان $\nabla\times\mathbf{F} = 0$ (حيث $\mathbf{F}$ غير دورانية) أثبت أن $\mathbf{F}$ تكون تحفظية

(أ) إذا كان $\mathbf{F}$ مجالا تحفظيا حينئذ باستخدام المسألة ١٠ $\mathbf{F} = \Delta\phi$.

لذا $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla\times\nabla\phi = 0$ (أنظر مسألة (٢٧ أ) الفصل الرابع) .

(ب) إذا كان $\nabla\times\mathbf{F} = 0$ حينئذ $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$ ولذلك

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

لابد من إثبات أن $\mathbf{F} = \nabla\phi$ يأتى كنتيجة لهذه .

الشغل المبذول فى تحريك جسيم من النقطة (x_1, y_1, z_1) إلى النقطة (x, y, z) فى مجال القوة $\mathbf{F}$ يكون

$$\int_C F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$$

حيث C المسار الذى يربط بين (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) دعنا نختار كمسار خاص أجزاء من الخط المستقيم من (x_1, y_1, z_1) إلى (x, y_1, z_1) إلى (x, y, z_1) إلى (x, y, z) ونسمى الدالة $\phi(x, y, z)$ الشغل المبذول على طول هذا المسار الخاص . إذن

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_1}^{x} F_1(x, y_1, z_1)\,dx + \int_{y_1}^{y} F_2(x,y,z_1)\,dy + \int_{z_1}^{z} F_3(x,y,z)\,dz$$

وأنه لذلك يتبع

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_3(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2(x,y,z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_2(x,y,z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_2(x,y,z_1) + F_2(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z} = F_2(x,y,z_1) + F_2(x,y,z) - F_2(x,y,z_1) = F_2(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_1(x,y_1,z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z_1)\,dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_1(x,y_1,z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z_1)\,dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_1(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z_1)\Big|_{y_1}^{y} + F_1(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z}$$

$$= F_1(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z_1) - F(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z) - F(x,y,z_1) = F_1(x,y,z)$$

إذن

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$$

لذلك فالشرط الضرورى والكافى لأن يكون المجال $\mathbf{F}$ تحفظى هو أن $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

١٢ – (١) بين أن $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ يكون مجال قوة تحفظى . (ب) أوجد الجهد العددى
(جـ) أوجد الشغل المبذول فى تحريك جسم فى هذا المجال من $(1, -2, 1)$ إلى $(3, 1, 4)$.

(١) من المسألة ١١ الشرط اللازم والكافى لأن تكون القوة تحفظية هو $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$

الآن

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0$$

لذلك $\mathbf{F}$ هو مجال قوة تحفظى

(ب) طريقة اولى :

من المسألة ١٠ $\mathbf{F} = \nabla\phi$ أو $\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ حينئذ

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \quad (1) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 \quad (2) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 \quad (3)$$

بالتكامل ، نجـد من ١ ، ٢ ، ٣ على الترتيب أن :

$$\phi = x^2y + xz^3 + f(y,z)$$
$$\phi = x^2y + g(x,z)$$
$$\phi = xz^3 + h(x,y)$$

وهذا يتفق إذا اخترنا $f(y,z) = 0,\ g(x,z) = xz^3,\ h(x,y) = x^2y$ لذلك $\phi = x^2y + xz^3$ التي يمكن إضافة أي ثابت إليها .

طريقة ثانية :

حيث $\mathbf{F}$ تكون تحفظية ، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على المسار C الذى يربط بين (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) . باستعمال طريقة المسألة (١٠ ب) .

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_{x_1}^{x} (2xy_1 + z_1^3)\,dx + \int_{y_1}^{y} x^2\,dy + \int_{z_1}^{z} 3xz^2\,dz \\
&= (x^2y_1 + xz_1^3)\Big|_{x_1}^{x} + x^2y\Big|_{y_1}^{y} + xz^3\Big|_{z_1}^{z} \\
&= x^2y_1 + xz_1^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 + x^2y - x^2y_1 + xz^3 - xz_1^3 \\
&= x^2y + xz^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 = x^2y + xz^3 + \text{ثابت}
\end{aligned}$$

طريقة ثالثة : $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$

حينئـذ

$$\begin{aligned}
d\phi = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= (2xy + z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz \\
&= (2xy\,dx + x^2\,dy) + (z^3\,dx + 3xz^2\,dz) \\
&= d(x^2y) + d(xz^3) = d(x^2y + xz^3)
\end{aligned}$$

$\therefore\ \phi = x^2y + xz^3 +$ ثابت

(ج) الشغل المبذول

$$\begin{aligned}
&= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{P_1}^{P_2} (2xy + z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz \\
&= \int_{P_1}^{P_2} d(x^2y + xz^3) = x^2y + xz^3\Big|_{P_1}^{P_2} = x^2y + xz^3\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = 202
\end{aligned}$$

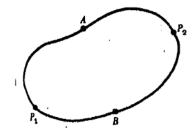
طريقة اخرى :

من الجزء (ب) $\phi(x,y,z) = x^2y + xz^3 + \text{constant}$

حينئذ الشغل المبذول $= \phi(3,1,4) - \phi(1,-2,1) = 202$.

١٣ – أثبت أنه إذا كان $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على مسار ربط أى نقطتين P_1 و P_2 فى منطقة معلومة ، إذن $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ لكل المسارات المغلقة فى المنطقة وبالعكس .

ليكن $P_1 AP_2 BP_1$ منحنى مغلق (شكل ٥ – ٥) . حينئذ



شكل ٥ – ٥

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

حيث أن التكامل من P_1 إلى P_2 على طول المسار خلال A مثل ذلك الذى على المسار من B من الفرض .

وبالعكس إذا كان $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ إذن

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

لذلك $$\int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

١٤ – (ا) بين أن الشرط اللازم والكافى لكى يكون $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ تفاضليا مضبوطا هو أن يكون $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ حيث $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

(ب) بين أن $(y^2z^3\cos x - 4x^3z)\,dx + 2z^3y\sin x\,dy + (3y^2z^2\sin x - x^4)\,dz$ تكون تفاضلية مضبوطة فى الدالة ϕ وأوجد ϕ .

(ا) افترض $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$ معادلة تفاضلية مضبوطة . حيث أن x, y, z متغيرات غير مستقلة . إذن

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

و لذا $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$ هكذا $\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\nabla\phi = 0$

عكسيا إذا كان $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ حينئذ من المسألة ١١ ، $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ولذا $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$
أى أن $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi$ تفاضل مضبوط .

(ب) $\mathbf{F} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\mathbf{i} + 2z^3y \sin x\,\mathbf{j} + (3y^2z^2 \sin x - x^4)\mathbf{k}$ ، $\nabla \times \mathbf{F}$ ومحسوبة لتكون صفرا . لذلك وكما جاء بالجزء (١)

$$(y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\,dx \;+\; 2z^3y \sin x\,dy \;+\; (3y^2z^2 \sin x - x^4)\,dz \;=\; d\phi$$

بأى طريقة من طرق مسألة ١٢ نجد أن $\phi = y^2z^3 \sin x - x^4z$ + ثابت

١٥ - ليكن $\mathbf{F}$ مجال قوة تحفظى بحيث أن $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. افترض جسما كتلته m ثابتة . يتحرك فى هذا المجال . إذا كانت A ، B أى نقطتين فى الفراغ . أثبت أن

$$\phi(A) + \tfrac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \tfrac{1}{2}mv_B^2$$

حيث v_A ، v_B لهما مقادير سرعات الجسم عند A ، B على الترتيب .

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad \text{إذن} \qquad \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$$

كامل

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

إذا

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi, \quad \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B).$$

حينئذ

$$\phi(A) - \phi(B) = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$$

والنتيجة تتبع

تسمى $\phi(A)$ طاقة الوضع عند A و $\tfrac{1}{2}mv_A^2$ تكون هى طاقة الحركة عند A. تنص النتيجة على أن الطاقة الكلية عند A تساوى الطاقة الكلية عند B (حفظ الطاقة) . تذكر استعمال علامة الناقص فى $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.

١٦ - إذا كان $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$ ، $\phi = 2xyz^2$ و C هى المنحنى $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ من $t = 0$ إلى $t = 1$ أحسب التكاملات الخطية (١) $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ (ب) $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$

(١) على طول C

$$\begin{aligned} \phi &= 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= (2t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt. \end{aligned}$$

و

إذن

$$\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} 4t^9(2t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$$

$$= \mathbf{i}\int_0^1 8t^{10}\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 8t^9\,dt + \mathbf{k}\int_0^1 12t^{11}\,dt = \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(ب) على طول C ، $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k} = 2t^3\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$

حينئذ

$$\mathbf{F}\times d\mathbf{r} = (2t^3\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}) \times (2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt = \left[(-3t^5-2t^4)\,\mathbf{i} + (2t^5-6t^5)\,\mathbf{j} + (4t^3+2t^4)\,\mathbf{k}\right] dt$$

و

$$\int_C \mathbf{F}\times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_0^1 (-3t^5-2t^4)\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 (-4t^5)\,dt + \mathbf{k}\int_0^1 (4t^3+2t^4)\,dt$$

$$= -\frac{9}{10}\,\mathbf{i} - \frac{2}{3}\,\mathbf{j} + \frac{7}{5}\,\mathbf{k}$$

تكاملات السطح :

١٧ – معطى تعريف للكمية $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ على سطح S بدلالة نهاية المجموع .

قسم المساحة S إلى M من عناصر مساحة ΔS_p حيث $p = 1, 2, 3, \ldots, M$. أختر أى نقطة P_p فى نطاق ΔS_p والتى احداثياتها (x_p, y_p, z_p) . عرف $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$ ليكن $\mathbf{n}_p$ وحدة المتجه العمودية الموجبة للمساحة ΔS_p عند P . من المجموع .

$$\sum_{p=1}^{M} \mathbf{A}_p\cdot\mathbf{n}_p\,\Delta S_p$$

حيث $\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p$ تكون مركبة عمودية المقدار $\mathbf{A}_p$ عنـد P_p .

الآن نأخذ النهايات لهذا المجموع كالآتى $M \to \infty$ بطريقة ما بحيث أكبر بعد من كل من ΔS_p يقترب من الصفر .

هذه النهايات – إذا وجدت – تسمى السطحى للمركبة العمودية للموجه $\mathbf{A}$ على S ويعرف بواسطة

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

شكل ٥ – ٦

١٨ – افترض أن السطح S له الاسقاط R على المستوى xy (شكل مسألة ١٨) بين أن

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

من المسألة ١٧ يكون تكامل السطح هو نهاية المجموع .

$$\sum_{p=1}^{N} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \Delta S_p \qquad (١)$$

اسقاط ΔSp على المستوى xy يكون $|(\mathbf{n}p\Delta Sp) \cdot \mathbf{k}|$ أو $|\mathbf{n}p \cdot \mathbf{k}| \Delta . Sp$ والذى يساوى $\Delta xp \Delta yp$

حيث أن $\Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$ لذا يصبح جمع (١)

$$\sum_{p=1}^{N} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|} \qquad (٢)$$

من مبادئ نظريات حساب التكامل نهاية هذا المجموع الذى فيه $M \to \infty$ بطريقة ما حيث يكون البعد الأكبر لقيمة Δxp و Δyp يقترب من الصفر فيكون

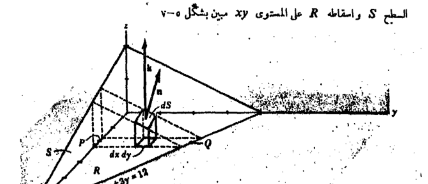
$$\iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

وبالتالى تكون النتيجة المطلوبة .

بقول محدد فإن النتيجة $\Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$ فقط تقريبا حقيقية لكن يمكن أن نرى فى الفحص الدقيق أنهم يختلفوا عن بعض بكمية متناهية الصغر لرتبة أعلى من $\Delta xp \Delta yp$ وباستخدام هذه النهايات فى (١) ، (٢) يمكن إيضاح أنها فى الحقيقة متساوية .

١٩ – احسب $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ حيث $\mathbf{A} = 18z\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$ و S هى جزء من المستوى $2x + 3y + 6z = 12$ والموجودة فى الثمن الأول .

السطح S واسقاطه R على المستوى xy مبين بشكل ٥–٧



شكل ٥ – ٧

من مسألة ١٧

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

لإيجاد $\mathbf{n}$ تذكر أن المتجه العمودى على السطح $2x + 3y + 6z = 12$ يعطى بالمقدار $\nabla(2x + 3y + 6z) =$ $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (أنظر مسألة ٥ من الفصل ٤) . حينئذ الوحدة العمودية لأى نقطة للسطح S. (شكل ٥–٧) تكون

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

لـذا $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = (\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = \frac{6}{7}$ وهكذا $\frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \frac{7}{6} dx\, dy$

أيضـا $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (18z\,\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k})\cdot(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}) = \frac{36z - 36 + 18y}{7} = \frac{36 - 12x}{7}$

باستعمال الحقيقة أن $z = \frac{12 - 2x - 3y}{6}$ من معادلة السطح S إذن

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \iint_R (\frac{36 - 12x}{7})\frac{7}{6}\, dx\, dy = \iint_R (6 - 2x)\, dx\, dy$$

لحساب التكامل الثنائى على R ، إجعل x ثابتة وكامل بالنسبة إلى y من $y = 0$ (P فى شكل ٥–٧) إلى $y = \frac{12 - 2x}{3}$ (Q فى شكل ٥–٧) ، ثم كامل بالنسبة إلى x من $x = 0$ إلى $x = 6$. فى هذه الحالة تكون R قد أكلت تماما ويصبح التكامل

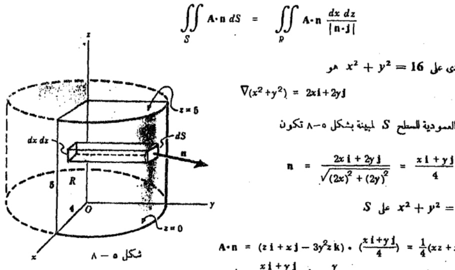
$$\int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{(12-2x)/3} (6 - 2x)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{6} (24 - 12x + \frac{4x^2}{3})\, dx = 24$$

إذا اخترنا الوحدة العمودية الموجبة $\mathbf{n}$ عكس التى فى شكل ٥–٧ سنحصل على النتيجة $24-$.

٢٠ – احسب $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$ حيث $\mathbf{A} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2 z\,\mathbf{k}$ و S هى سطح الأسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ الموجودة فى الثمن الأول بين $z = 0$ و $z = 5$

أسقط S على المستوى xz كما فى شكل ٥–٨ والمسمى اسقاط R تذكر أن اسقاط S على المستوى xy لا يمكن استعماله هنا . إذن

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, \frac{dx\, dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$



شكل ٥ — ٨

العمودى على $x^2 + y^2 = 16$ هو

$$\nabla(x^2+y^2) = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$$

لذا الوحدة العمودية للسطح S المبينة بشكل ٥—٨ تكون

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{4}$$

حيث $x^2 + y^2 = 16$ على S

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2z\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}(xz + xy)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{4}\cdot\mathbf{j} = \frac{y}{4}.$$

حينئــذ تكامل السطح يساوى

$$\iint_R \frac{xz + xy}{y}\, dx\, dz = \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}} + x\right) dx\, dz = \int_{z=0}^{5} (4z+8)\, dz = 90$$

٢١ — أحسب $\iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$ حيث $\phi = {}^3/_8\, xyz$ و S سطح المبين فى مسألة ٢

لدينا

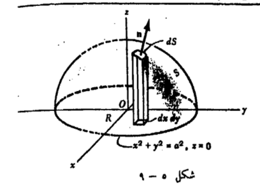
$$\iint_S \phi\mathbf{n}\, dS = \iint_R \phi\mathbf{n}\, \frac{dx\, dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$

باستعمال $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \frac{y}{4}$ ، $\mathbf{n} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{4}$ مثل مسألة ٢٠ يصبح هذا التكامل الأخير

$$\iint_R \frac{3}{8}xz\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})\, dx\, dz = \frac{3}{8}\int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4} (x^2z\,\mathbf{i} + xz\sqrt{16-x^2}\,\mathbf{j})\, dx\, dz$$

$$= \frac{3}{8}\int_{z=0}^{5}\left(\frac{64}{3}z\,\mathbf{i} + \frac{64}{3}z\,\mathbf{j}\right) dz = 100\,\mathbf{i} + 100\,\mathbf{j}$$

٢٢ — إذا كان $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + (x-2xz)\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$ احسب $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dS$ حيث S سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ فوق المستوى xy



شكل ٥ — ٩

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x-2xz & -xy \end{vmatrix} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$$

عمودى على $x^2+y^2+z^2=a^2$ is

$$\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

حينئذ الوحدة العمودية $\mathbf{n}$ للشكل ٥—٩ المعطى بالمعادلة

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+2z\,\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{a}$$

حيث $x^2+y^2+z^2=a^2$

اسقاط S على المستوى xy هو المنطقة R المحددة بالدائرة $x^2+y^2=a^2, z=0$ (أنظر شكل ٥—٩). إذن

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

$$= \iint_R (x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}-2z\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{a}\right)\frac{dx\,dy}{z/a}$$

$$= \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2+y^2)-2a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

استخدم حقيقة أن $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ لحساب التكامل الثنائى ، حول الاحداثيات الكرتيزية إلى الاحداثيات القطبية (ρ,ϕ) حيث $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi$ و $dx\,dy$ تستبدل بالقيمة $\rho\,d\rho\,d\phi$ يصبح التكامل الثنائى

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \frac{3\rho^2-2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \frac{3(\rho^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\phi$$

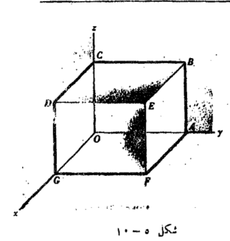
$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2} + \frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right) d\rho\,d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[(a^2-\rho^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_{\rho=0}^{a}\right] d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} (a^3-a^3)\,d\phi = 0$$

٢٢ – إذا كان $\mathbf{F} = 4xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ أحسب $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$

حيث S سطح المكعب (شكل ٥–١٠) المحدد بواسطة $x = 0$ و $x = 1$ و $y = 0$ و $y = 1$ و $z = 0$ و $z = 1$



شكل ٥ – ١٠

الوجه $DEFG$ ، $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ، $x = 1$ حينئذ

$$\iint_{DEFG} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4z\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 4z\,dy\,dz = 2$$

الوجه $ABCO$: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ ، $x = 0$. إذن

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i})\,dy\,dz = 0$$

الوجه $ABEF$: $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ ، $y = 1$. إذن

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}\,dx\,dz = \int_0^1\int_0^1 -dx\,dz = -1$$

الوجه $OGDC$: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ ، $y = 0$. إذن

$$\iint_{OGDC} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\,\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{j})\,dx\,dz = 0$$

الوجه $BCDE$: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ، $z = 1$. إذن

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4x\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}$$

الوجه $AFGO$: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ ، $z = 0$. إذن

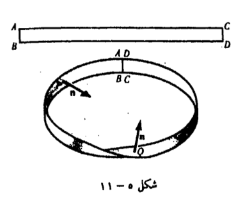
$$\iint_{AFGO} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{k})\,dx\,dy = 0$$

بالجمع

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{3}{2}\,.$$

٢٤ – فى التعامل بتكاملات السطح قيدنا أنفسنا بالاسطح التى لها جانبان . معطى مثال السطح الذى ليس له جانبان .

خذ شريط ورق مثل $ABCD$ (شكل ٥ – ١١) بلوى القصاصة بحيث أن النقط A و B تقع على D و C على الترتيب شكل ٥ – ١١ إذا كان $\mathbf{n}$ هو العمود الموجب عند النقطة P السطح ، نجد أن كلما تحرك $\mathbf{n}$ حول السطح فإنه يعكس اتجاهه الأصلى عند مايصل إلى P مرة أخرى . إذا حاولنا تلوين جنب واحد فقط من السطح سنجد أن الكل قد تلون . هذا السطح يسمى شريحة موبيس كثال لسطح له جانب واحد فقط فى بعض الأحيان يسمى هذا السطح غير قابل للتوجه وسطح الجانبين يسمى قابل للتوجه .



شكل ٥ – ١١

تكاملات الحجم :

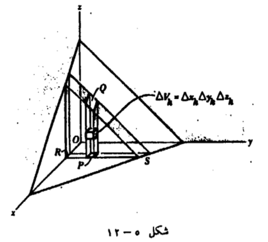
٢٥ – ليكن $\phi = 45x^2 y$ وليكن V تعرف المنطقة المغلقة المحدد بالمستويات $4x + 2y + z = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

(أ) عبر عن $\iiint_V \phi\, dV$ كنهاية مجموع (ب) احسب التكامل الذى فى (أ) .

(أ) قسم المنطقة V إلى أجزاء أصغر إلى M من المكعبات لها حجم $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k \quad k = 1, 2, \dots, M$ شكل (٥ – ١٢) وليكن (x_k, y_k, z_k) نقطة فى هذ المكعب عرف الدالة $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$ اعتبر المجموع .

$$\sum_{k=1}^{M} \phi_k \Delta V_k \qquad (1)$$

على كل المكعبات الممكنة فى المنطقة أخذت النهاية لهذا المجموع عندما $M \to \infty$ فى مثل هذه الحالة أكبر الكميات ΔV_k ستقترب من الصفر إن وجدت ستعرف $\iiint_V \phi\, dV$ يمكن أن نبين أن هذه النهاية مستقلة عن طريقة التقسيم إذا كانت ϕ مستمرة داخل V .



شكل ٥ – ١٢

فى تكوين المجموع (١) على كل المكعبات الممكنة فى المنطقة ينصح أن يتابع فى أسلوب مرتب . إحدى الطرق الممكنة أن نجمع أولا كل الحدود التى فى (١) المناظرة لعناصر الحجم المحتوية فى عمود مثل PQ هذا يعادل محافظتنا على x_k و y_k ثابتة والجمع على كل z_k's ثم يثبت x_k ولكن أجمع على كل y_k's هذا يعادل لجمع كل الأعمدة مثل BQ المحتوية (الموجودة) فى اللوح RS وبالتالى يعادل الجمع على كل المكعبات الموجودة فى مثل هذا اللوح . أخيراً غير x_k هذا يعادل جمع لكل الألواح مثل RS .

فى هذه الطريقة الجمع أخذت أولا على z_k's ثم على y_k's وأخيراً على x_k's على أى حال يمكن أخذ المجموع فى أى ترتيب آخر .

(ب) الأفكار المتضمنة فى طريقة الجمع المبينة فى (أ) يمكن استخدامها فى حساب التكامل . الاحتفاظ بقيم x ، y ثابتة ثم كامل من $z = 0$ (قاعدة العمود PQ) إلى $z = 8 - 4x - 2y$ (قمة العمود PQ) . ثانياً احتفظ بقيمة x ثابتة وكامل بالنسبة إلى y . هذه يعادل لجمع الأعمدة التى لها قاعدة فى المستوى xy $(z = 0)$ الموجودة فى أى مكان من R (حيث $y = 0$) إلى S (حيث $4x + 2y = 8$ أو $(y = 4 - 2x)$) ويكون التكامل من $y = 0$ إلى $y = 4 - 2x$. أخيراً أجمع كل الألواح الموازية للمستوى yz الذى يعادل التكامل من $x = 0$ إلى $x = 2$. ويمكن أن يكتب التكامل فى الصورة

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x}\int_{z=0}^{8-4x-2y} 45x^2 y \, dz\, dy\, dx = 45\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x} x^2 y\,(8-4x-2y)\, dy\, dx$$

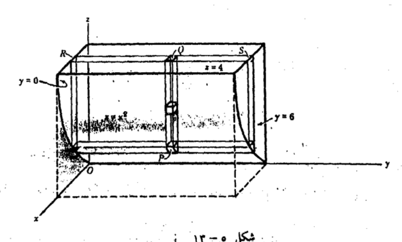
$$= 45\int_{x=0}^{2} \tfrac{1}{3}x^2(4-2x)^3\, dx = 128$$

لاحظ فيزيائياً يمكن تعليل هذه النتيجة ككتلة فى المنطقة V التى فيها الكثافة ϕ تتغير تبعاً للصيغة $\phi = 45x^2 y$.

٢٦ – ليكن $\mathbf{F} = 2xz\,\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ احسب $\iiint_V \mathbf{F}\, dV$ حيث V منطقة محددة بالسطح

$$x=0,\ y=0,\ y=6,\ z=x^2,\ z=4$$

المنطقة V غطيت فى (أ) بالاحتفاظ بقيم x ، y ثابتة وإجراء التكامل من $z = x^2$ إلى $z = 4$ (قاعدة إلى قمة العمود PQ) ، (ب) ثم بالاحتفاظ بقيمة x ثابتة وإجراء التكامل من $y = 0$ إلى $y = 6$ (من R إلى S فى الشريحة) (جـ) أخيراً كامل من $x = 0$ إلى $x = 2$ (حيث $z = x^2$ تقابل $z = 4$) إذن يكون التكامل المطلوب هو



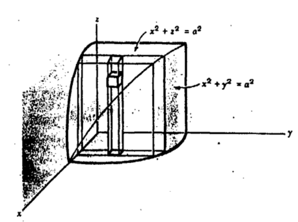
شكل ٥ – ١٣

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4}(2xz\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k})\,dz\,dy\,dx$$

$$= \mathbf{i}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 2xz\,dz\,dy\,dx \;-\; \mathbf{j}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 x\,dz\,dy\,dx \;+\; \mathbf{k}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 y^2\,dz\,dy\,dx$$

$$= 128\,\mathbf{i} - 24\,\mathbf{j} + 384\,\mathbf{k}$$

٢٧ – أوجد حجم المنطقة المشتركة بين تقاطع الاسطوانتين $x^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2=a^2$



شكل ٥ – ١٤

الحجم المطلوب = ٨ مرات حجم المنطقة المبينة فى شكل ٥ – ١٤

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx = 8\int_{x=0}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{16a^3}{3}$$

مسائل متنوعة

٢٨ – إذا كان $\mathbf{R}(t) = (3t^2-t)\mathbf{i} + (2-6t)\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{k}$ أوجد (أ) $\int \mathbf{R}(t)\,dt$ ، (ب) $\int_2^4 \mathbf{R}(t)\,dt$

الجواب : (أ) $(t^3-t^2/2)\mathbf{i} + (2t-3t^2)\mathbf{j} - 2t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{c}$ (ب) $50\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

٢٩ – احسب $\int_0^{\pi/2}(3\sin u\,\mathbf{i} + 2\cos u\,\mathbf{j})\,du$ الجواب $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

٣٠ – إذا كان $\mathbf{A}(t) = t\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + (t-1)\,\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k}$

احسب (أ) $\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt$ (ب) $\int_0^2 \mathbf{A}\times\mathbf{B}\,dt$

الجواب : (أ) 12 (ب) $-24\,\mathbf{i} - \frac{40}{3}\mathbf{j} + \frac{64}{5}\mathbf{k}$

٣١ – ليكن $\mathbf{A} = t\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k},\ \mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$

احسب (أ) $\int_1^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}\,dt$ (ب) $\int_1^2 \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\,dt$

الجواب : (أ) 0 (ب) $-\frac{87}{2}\mathbf{i} - \frac{44}{3}\mathbf{j} + \frac{15}{2}\mathbf{k}$

٣٢ – العجلة $\mathbf{a}$ لجسيم عند أى زمن $t \geqq 0$ تعطى بالمعادلة $\mathbf{a} = e^{-t}\mathbf{i} - 6(t+1)\mathbf{j} + 3\sin t\,\mathbf{k}$ إذا كانت السرعة $\mathbf{v}$ والإزاحة $\mathbf{r}$ قيمتهم صفر عند $t = 0$ أوجد $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ عند أى زمن .

الجواب :

$\mathbf{v} = (1 - e^{-t})\mathbf{i} - (3t^2+6t)\mathbf{j} + (3 - 3\cos t)\mathbf{k},\quad \mathbf{r} = (t - 1 + e^{-t})\mathbf{i} - (t^3+3t^2)\mathbf{j} + (3t - 3\sin t)\mathbf{k}$;

٣٣ – العجلة $\mathbf{a}$ لجسيم عند أى زمن t يعطى بالمعادلة $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$ ، حيث g كية ثابتة عند $t = 0$ تعطى السرعة بالمعادلة $\mathbf{v} = v_0\cos\theta_0\,\mathbf{i} + v_0\sin\theta_0\,\mathbf{j}$ والإزاحة بالمعادلة $\mathbf{r} = 0$. أوجد $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ عند أى زمن $t > 0$. تصف المعادلة حركة قذيفة انطلقت من مدفع يميل بزاوية θ_0 مع الاتجاه الموجب لمحور x .

الجواب : $\mathbf{v} = v_0\cos\theta_0\,\mathbf{i} + (v_0\sin\theta_0 - gt)\mathbf{j},\quad \mathbf{r} = (v_0\cos\theta_0)t\,\mathbf{i} + [(v_0\sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2]\mathbf{j}$

٣٤ – احسب $\int_2^3 \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,dt$ إذا $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{A}(3) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ الجواب : 10

٣٥ – أوجد السرعة المساحية لجسيم يتحرك على المسار $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\sin\omega t\,\mathbf{j}$ حيث a, b, ω تكون ثوابت و t هو الزمن . الجواب : $\frac{1}{2}ab\omega\mathbf{k}$

٣٦ – إثبت أن مربع دوره الكواكب فى حركتها حول الشمس تتناسب مع مكعب أكبر المحاور فى مسارها الذى على شكل قطع ناقص (قانون كيبلر الثالث) .

٣٧ – إذا كان $\mathbf{A} = (2y+3)\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$ احسب $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ على طول المسارات C .

(أ) $x = 2t^2,\ y = t,\ z = t^3$ from $t = 0$ to $t = 1$

(ب) الخطوط المستقيمة من $(0, 0, 0)$ إلى $(0, 0, 1)$ ثم إلى $(0, 1, 1)$ ثم إلى $(2, 1, 1)$

(جـ) الخط المستقيم الذى يربط بين $(0, 0, 0)$ و $(2, 1, 1)$

الجواب : (أ) 288/35 (ب) 10 (جـ) 8

٣٨ – إذا كان $\mathbf{F} = (5xy - 6x^2)\mathbf{i} + (2y - 4x)\mathbf{j}$ احسب $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ على طول المنحنى C فى المستوى xy ، $y = x^3$ من النقطة $(1,1)$ إلى $(2,8)$. الجواب : 35

٣٩ – إذا كان $\mathbf{F} = (2x+y)\mathbf{i} + (3y-x)\mathbf{j}$ احسب $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ حيث C منحنى فى المستوى xy متكون من خطوط مستقيمة من $(0,0)$ إلى $(2,0)$ ثم إلى $(3,2)$. الجواب : ١١

٤٠ – أوجد الشغل المبذول فى تحريك جسيم فى مجال القوة $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz-y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ على طول

(أ) الخط المستقيم من النقطة $(0,0,0)$ إلى النقطة $(2,1,3)$.

(ب) منحنى الفراغ $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$. من $t = 0$ إلى $t = 1$.

(ج) المنحنى المعروف بالمعادلة $x^2 = 4y,\ 3x^3 = 8z$ من $x = 0$ إلى $x = 2$.

الجواب : (أ) 16 (ب) 14.2 (ج) 16

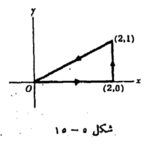
٤١ – احسب $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ حيث $\mathbf{F} = (x - 3y)\,\mathbf{i} + (y - 2x)\,\mathbf{j}$ و C هو المنحنى المغلق فى المستوى xy و $x = 2\cos t$ ، $y = 3\sin t$ من $t = 0$ إلى $t = 2\pi$.

الجواب : 6π إذا كانت C تتحرك فى الاتجاه الموجب (عكس اتجاه عقرب الساعة) .

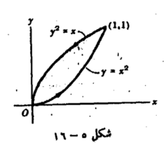
٤٢ – إذا كانت $\mathbf{T}$ وحدة المتجه المماسية للمنحنى C ، $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ بين أن الشغل المبذول فى حركة جسيم فى مجال القوة $\mathbf{F}$ على طول المنحنى C يعطى بالعلاقة $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ حيث s هى طول القوس .

٤٣ – إذا كانت $\mathbf{F} = (2x+y^2)\mathbf{i} + (3y-4x)\mathbf{j}$ احسب $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ حول المثلث C شكل ٥ – ١٥ .

(أ) فى الاتجاه المشار إليه (ب) عكس الاتجاه المشار إليه الجواب : (أ) $-14/3$ (ب) $14/3$



شكل ٥ – ١٥



شكل ٥ – ١٦

٤٤ – احسب $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ حول المنحنى المغلق C بشكل ٥ – ١٥ إذا كان $\mathbf{A} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ الجواب : 2/3

٤٥ – إذا كان $\mathbf{A} = (y-2x)\mathbf{i} + (3x+2y)\mathbf{j}$ احسب دوران $\mathbf{A}$ حول الدائرة C فى المستوى xy والتى مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2 إذا تحركت فى الاتجاه الموجب الجواب : 8π

٤٦ – (أ) إذا كان $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} - 2x^3z\,\mathbf{k}$ أثبت أن $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ مستقلة عن المنحنى الواصل بين نقطتين (ب) بين أنه يوجد دالة قابلة للتفاضل ϕ بحيث أن $\mathbf{A} = \nabla\phi$ وأوجدها ؛

الجواب : (ب) $\phi = 2x^2y - x^3z^2 +$ ثابت

٤٧ – (أ) أثبت أن $\mathbf{F} = (y^2\cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y\sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ مجال قوة تحفظي .

(ب) أوجد الجهد العددى للقوة $\mathbf{F}$.

(جـ) أوجد الشغل المبذول فى تحريك جسم فى هذا المجال من $(0, 1, -1)$ إلى $(\pi/2, -1, 2)$.

الجواب : (ب) $\phi = y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z +$ ثابت (جـ) $15 + 4\pi$

٤٨ – أثبت أن $\mathbf{F} = r^2\mathbf{r}$ يكون محافظاً وأوجد الجهد العددى . الجواب : $\phi = \frac{r^4}{4} +$ ثابت

٤٩ – بين إذا كان مجال القوة $\mathbf{F} = 2xz\,\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (2z - x^2)\mathbf{k}$ يكون محافظاً أو غير محافظ .

الجواب : غير محافظ

٥٠ – بين أن الشغل المبذول على جسم لتحريكه من A إلى B يساوى معدل تغير طاقة الحركة له عند هذه النقطة سواء كانت القوة محافظة أو غير محافظة .

٥١ – احسب $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ على طول المنحنى $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ الاتجاه الموجب ا من النقطة $(0, 1, 1)$ إلى النقطة $(1, 0, 1)$ إذا كانت $\mathbf{A} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$ الجواب : ١

٥٢ – (أ) إذا كان $\mathbf{E} = r\mathbf{r}$, هل توجد دالة ϕ بحيث أن $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ؟ إذا كان كذلك أوجدها .

(ب) احسب $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ إذا كانت C أى منحنى بسيط مغلق .

الجواب : (أ) $\phi = -\frac{r^3}{3} +$ ثابت (ب) 0

٥٣ – بين أن $(2x\cos y + z\sin y)\,dx + (xz\cos y - x^2\sin y)\,dy + x\sin y\,dz$ تكون معادلة تفاضلية مضبوطة . حينئذ حل المعادلة التفاضلية $(2x\cos y + z\sin y)\,dx + (xz\cos y - x^2\sin y)\,dy + x\sin y\,dz = 0$

الجواب : $x^2\cos y + xz\sin y =$ ثابت

٥٤ – حل (أ) $(e^{-y} + 3x^2y^2)\,dx + (2x^3y - xe^{-y})\,dy = 0$

(ب) $(z - e^{-x}\sin y)\,dx + (1 + e^{-x}\cos y)\,dy + (x - 8z)\,dz = 0$

الجواب : (أ) $xe^{-y} + x^3y^2 =$ ثابت (ب) $xz + e^{-x}\sin y + y - 4z^2 =$ ثابت

٥٥ – إذا كان $\phi = 2xy^2z + x^2y$ احسب $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ حيث C

(أ) هو المنحنى $x = t$ ، $y = t^2$ ، $z = t^3$ من $t = 0$ إلى $t = 1$

(ب) يتكون من خطوط مستقيمة من $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 0, 0)$ ثم إلى $(1, 1, 0)$ وثم إلى $(1, 1, 1)$.

الجواب : (أ) $\frac{19}{45}\mathbf{i} + \frac{11}{15}\mathbf{j} + \frac{75}{77}\mathbf{k}$ (ب) $\frac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

٥٦ – إذا كانت $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ أوجد $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ على طول المنحنى $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2\cos t$ من $t = 0$ إلى $t = \pi/2$. الجواب : $(2 - \frac{\pi}{4})\mathbf{i} + (\pi - \frac{1}{2})\mathbf{j}$

٥٧ – إذا كانت $\mathbf{A} = (3x+y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (y-2)\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ احسب $\oint_C (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times d\mathbf{r}$ حول الدائرة التى فى المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2 يتحرك فى الإتجاه الموجب .

الجواب : $4\pi(7\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

٥٨ – احسب $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$ لكل من الحالات الآتية

(أ) $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ حيث S سطح المستوى $2x + y = 6$ فى الثمن الأول المقطوع بالمستوى $z = 4$.

(ب) $\mathbf{A} = (x+y^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ حيث S سطح المستوى $2x + y + 2z = 6$ فى الثمن الأول .

الجواب : (أ) 108 (ب) 81

٥٩ – إذا كان $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ و S يكون سطح القطع المكافىء الاسطوانى $y^2 = 8x$ فى الثمن الأول المحدد بالمستويات $y = 4$ ، $z = 6$ احسب $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ الجواب : 132

٦٠ – احسب $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$ على السطح الداخلى S للمنطقة المحددة بالاسطوانة $x^2+z^2 = 9,\ x = 0\quad y = 0,\ z = 0$ و $y = 8$ إذا كان $\mathbf{A} = 6z\mathbf{i} + (2x+y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$. الجواب : 18π

٦١ – احسب $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, dS$ على ، (أ) السطح S لوحدة المكعب المحددة بمحاور المستويات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$

(ب) سطح الكرة التى نصف قطرها a ومركزها عند النقطة $(0, 0, 0)$.

الجواب : (أ) 3 (ب) $4\pi a^3$

٦٢ – احسب $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$ على السطح الداخل للمنطقة أعلى المستوى xy المحددة بالمخروط $z^2 = x^2+y^2$ والمستوى $z=4$ إذا كانت $\mathbf{A} = 4xz\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ الجواب : 320π

٦٣ – (أ) ليكن R مسقط السطح S على المستوى xy . أثبت أن مساحة السطح S تعطى المعادلة $\iint_R \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\, dx\, dy$ إذا كانت معادلة S هى $z = f(x, y)$.

(ب) ماهى مساحة السطح إذا كانت S لها المعادلة $F(x, y, z) = 0$?

الجواب : $\iint_R \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx\, dy$

٦٤ – أوجد مساحة سطح المستوى $x + 2y + 2z = 12$ المقطوع بواسطة (أ) $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ ، (ب) $x = 0, y = 0$ و $x^2 + y^2 = 16$ الجواب : (أ) $3/2$ (ب) 6π

٦٥ – أوجد مساحة سطح المنطقة المشتركة بين تقاطع الاسطوانتين $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$.

الجواب : $16a^2$

٦٦ – احسب (أ) $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ و (ب) $\iint_S \phi\, \mathbf{n}\, dS$ إذا كان $\mathbf{F} = (x+2y)\mathbf{i} - 3z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ ، $\phi = 4x + 3y - 2z$ ،

حيث S هى السطح $2x + y + 2z = 6$ المحددة بواسطة $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ و $y = 2$.

الجواب : (أ) 1 (ب) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

٦٧ – أوجد حل المسألة السابقة إذا كانت $2x + y + 2z = 6$ المحددة بواسطة $x = 0, y = 0$ و $z = 0$.

الجواب : (أ) $9/2$ (ب) $72\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 72\mathbf{k}$

٦٨ – احسب $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ على المنطقة R فى المستوى xy المحددة بـ $x^2 + y^2 = 36$. الجواب : 144π

٦٩ – احسب $\iiint_V (2x+y)\, dV$ حيث V هى المنطقة المغلقة المحددة بالاسطوانة $z = 4 - x^2$ والمستويات $x = 0, y = 0, y = 2$ ، و $z = 0$ الجواب : $80/3$

٧٠ – إذا كانت $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j} - 4x\,\mathbf{k}$ احسب (أ) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ و (ب) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV$

حيث V هى المنطقة المغلقة المحددة بالمستويات $2x + 2y + z = 4$ و $x = 0, y = 0, z = 0$

الجواب : (أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{8}{3}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$

الفصل السادس

نظرية التباعد — نظرية ستوكس
ونظريات التكامل المرتبطة

نظرية التباعد لجاوس :

تنص على أنه إذا كانت V هى الحجم المحدد بسطح مغلق S و $\mathbf{A}$ دالة موضع متجه لها تفاضل مستمر إذن

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

حيث $\mathbf{n}$ هو العمود الموجب على S (فى اتجاه الخارج) .

نظرية ستوكس :

تنص على أنه إذا كانت S سطحا مفتوحا ، ذا جانبين محددا بمنحنى مغلق غير متقاطع C (منحنى بسيط مغلق) حينئذ إذا كانت $\mathbf{A}$ لها مشتقات مستمرة .

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

حيث C تتحرك فى الاتجاه الموجب . يسمى اتجاه C موجبا إذا كان مشاهدا يسير على حدود S فى هذا الاتجاه ورأسه تشير إلى اتجاه العمود الموجب لـ S يكون السطح على شماله .

نظرية جرين فى المستوى :

إذا كانت R منطقة مغلقة فى المستوى xy محددة بمنحنى مغلق بسيط C وإذا كانت M و N دوال مستمرة فى x و y ولهما مشتقات مستمرة فى المنطقة فإن

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

حيث C تتحرك فى الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) ما لم يذكر غير ذلك سنفترض دائما أن $\oint$ أن التكامل مذكور فى الاتجاه الموجب .

نظرية جرين فى المستوى هى حالة خاصة من نظرية ستوكس (أنظر مسألة ٤) من الطريف ملاحظة أن نظرية جاوس للتباعد هى تعميم لنظرية جرين فى المستوى حيث (المستوى) المنطقة R وحدودها المغلقة (المنحنى) C حل محل (الفراغ) المنطقة V وحدودها المغلقة (السطح) S . لهذا السبب - فى بعض الأحيان تسمى نظرية التباعد نظرية جرين فى الفراغ (أنظر مسألة ٤) .

نظرية جرين فى المستوى صحيحة للمناطق المحدودة بواسطة عدد محدود من المنحنيات البسيطة المغلقة والتى لا تتقاطع (أنظر مسألة ١٠ ، ١١) .

نظريات التكامل المرتبطة :

١ -
$$\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

تسمى نظرية جرين أو متطابقة جرين الأولى

٢ -
$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

تسمى متطابقة جرين الثانية أو نظرية جرين المتماثلة أنظر مسألة ٢١

٣ -
$$\iiint_V \nabla\times\mathbf{A}\, dV = \iint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{A})\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

لاحظ هنا أن الضرب العددى لنظرية جاوس للتباعد حلت محل الضرب المتجهى أنظر مسألة ٢٣

٤ -
$$\oint_C \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla\phi)\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$$

٥ - ليكن ψ تمثل أما دالة متجه أو دالة عددية تبعا للرمز $\circ$ يبين ضرب عددى أو متجهى أو ضرب عادى . إذن :

$$\iiint_V \nabla\circ\psi\, dV = \iint_S \mathbf{n}\circ\psi\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\circ\psi$$

$$\oint_C d\mathbf{r}\circ\psi = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\circ\psi\, dS = \iint_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\circ\psi$$

نظرية جاوس للتباعد ونظرية ستوكس والنتيجة ٣ و ٤ هى حالات خاصة من هذه النظرية . أنظر مسائل ٢٢ ، ٢٣ ، ٣٤ .

صيغة عامل التكامل ∇ :

من الملاحظ أنه باستخدام مصطلحات المسألة ١٩ يمكن التعبير عن العامل ∇ رمزيا بالصيغة

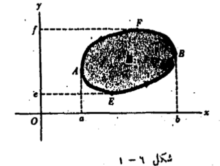
$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

حيث $\circ$ ترمز إلى الضرب العددى أو المتجهى أو العادى (أنظر مسألة ٢٥) النتيجة تثبت أنها مفيدة فى التوسع لمفهوم الانحدار ، والتباعد والالتفاف لنظم احداثيات غير الاحداثيات العمودية ؟ أنظر مسائل ١٩ و ٢٤ وكذلك الفصل ٧) .

مسائل محلولة

نظرية جرين فى المستوى :

١ – أثبت نظرية جرين فى المستوى إذا كان C منحنى مغلق الذى له الخاصية أن أى خط مستقيم يوازى محاور الاحداثيات تقطع C فى نقطتين على الأكثر .



شكل ٦ – ١

لتكون معادلات المنحنيات AEB و AFB (شكل ٦ – ١) هى $y = Y_1(x)$ و $y = Y_2(x)$ على الترتيب . إذا كانت R هى منطقة محددة بـ C يكون لدينا

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy \right] dx = \int_{x=a}^{b} M(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_a^b \left[M(x,Y_2) - M(x,Y_1) \right] dx$$

$$= -\int_a^b M(x,Y_1)\, dx - \int_b^a M(x,Y_2)\, dx = -\oint_C M\, dx$$

حينئذ (١)
$$\oint_C M\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy$$

بالمثل لتكن معادلات المنحنيات EAF و EBF هى $x = X_1(y)$ و $x = X_2(y)$ على الترتيب . إذن

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_e^f \left[N(X_2,y) - N(X_1,y)\right]dy$$

$$= \int_f^e N(X_1,y)\,dy + \int_e^f N(X_2,y)\,dy = \oint_C N\,dy$$

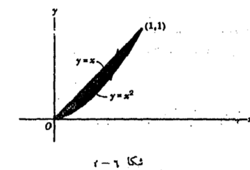
إذن (٢) $\displaystyle\oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy$

بجمع (١) و (٢) $\displaystyle\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$

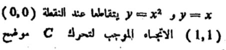
٢ – حقق نظرية جرين فى المستوى المعادلة

$$\oint_C (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$$

حيث C منحنى مغلق فى المنطقة المحددة بواسطة $y = x$ و $y = x^2$.



شكل ٦ – ٢



$y = x$ و $y = x^2$ يتقاطعا عند النقطة $(0,0)$ و $(1,1)$ الاتجاه الموجب لتحرك C موضح بالشكل ٦ – ٢

على طول $y = x^2$ التكامل الخطى يساوى

$$\int_0^1 \left((x)(x^2) + x^4\right)dx + (x^2)(2x)\,dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4)\,dx = \frac{19}{20}$$

على طول $y = x$ من $(1,1)$ إلى $(0,0)$ التكامل الخطى يساوى

$$\int_1^0 \left((x)(x) + x^2\right)dx + x^2\,dx = \int_1^0 3x^2\,dx = -1$$

إذن التكامل الخطى المطلوب $= \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (x - 2y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\,dx$$

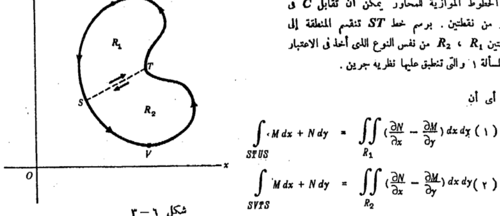
$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 (xy - y^2)\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - x^3)\,dx = -\frac{1}{20}$$

حيث تكون النظرية قد برهنت

٣ - استخدم اثبات نظرية جرين فى المستوى المعطى فى مسألة ١ للمنحنيات C التى فيها الخطوط الموازية لمحاور الأحداثيات يمكن أن تقطع C فى أكثر من نقطتين .

اعتبر المنحنى المغلق C المبين فى شكل ٦-٣ واللى فيه الخطوط الموازية للمحاور يمكن أن تقابل C فى أكثر من نقطتين . برسم خط ST تنقسم المنطقة إلى منطقتين R_1 ، R_2 من نفس النوع اللى أخذ فى الاعتبار فى المسألة ١ والتى تنطبق عليها نظرية جرين .



شكل ٦ — ٣

أى أن

$$\int_{STUS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \quad (١)$$

$$\int_{SVTS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \quad (٢)$$

بجمع الأطراف اليسرى للمعادلات (١) ، (٢) واهمال القيمة التكاملية $M\,dx + N\,dy$ فى كل حالة .

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

باستخدام الحقيقة $\int_{ST} = -\int_{TS}$

بجمع الأطراف اليمنى للمعادلات (١) ، (٢) وإهمال القيمة التكاملية .

$$\iint_{R_1} + \iint_{R_2} = \iint_{R}$$

حيث تتكون R من المناطق R_1 ، R_2

إذن $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{TUSVT} M\,dx + N\,dy$ وتكون النظرية قد أثبتت .

منطقة R المعتبرة هنا وفى المسألة (١) ، والتى لها أى منحنى مغلق يقع فى المنطقة R يمكن باستمرار أن ينكمش إلى نقطة بدون أن يترك R ، تسمى المنطقة البسيطة الاتصال . المنطقة التى ليست بسيطة الاتصال تسمى متعددة الاتصال . لقد بينا هنا أن نظرية جرين فى المستوى تطبق على المنطقة البسيطة الاتصال المحددة بمنحنى مغلق . فى (المسألة ١٠) امتدت النظرية لتشمل المناطق متعددة الاتصال .

للمناطق البسيطة الاتصال الأكثر تعقداً يجوز أن يكون من الضرورى رسم خطوط كثيرة مثل ST لتأسيس النظرية

٤ – عبر بنظرية جرين فى المستوى بالرموز الاتجاهية

لدينا $M\,dx + N\,dy = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ حيث $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ و $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$

لذلك $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$

أيضاً إذا كان $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ إذن

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

لذلك $(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$

حينئذ باستخدام نظرية جرين فى المستوى يمكننا كتابة

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}\,dR$$

حيث $dR = dx\,dy$.

تعميم ذلك السطوح S فى فراغ له المنحنى C كحدود يؤدى طبيعياً إلى نظرية ستوكس التى برهنت فى (المسألة ٣١)

طريقة أخرى :

كما ذكرنا سابقاً

$$M\,dx + N\,dy = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds = \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

حيث $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds =$ وحدة المماس الاتجاهي لـ C (شكل ٦ – ٤). إذا كانت $\mathbf{n}$ وحدة العمود على C في الاتجاه الخارجي ، إذا $\mathbf{T} = \mathbf{k}\times\mathbf{n}$ لذلك

$$M\,dx + N\,dy = \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\,ds = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{n})\,ds = (\mathbf{A}\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,ds$$

حيث $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j},\ \mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{k} = (M\mathbf{i}+N\mathbf{j})\times\mathbf{k} = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$

$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \nabla\cdot\mathbf{B}$. حينئذ تصبح نظرية جرين في المستوى

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \nabla\cdot\mathbf{B}\,dR$$

حيث $dR = dx\,dy$.

شكل ٦ – ٤

تعميم ذلك إلى الحالة التي فيها طول القوس التفاضلي ds لمنحنى مغلق C استبدلت مساحة السطح التفاضلية dS للسطح المغلق ، ومساحة المنطقة R المناظرة المحاط بالمنحنى C بالحجم V المحاط بالسطح S ، يؤدي إلى نظرية جاوس (نظرية التباعد) في الفراغ

$$\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV$$

٥ – علل فيزيائياً النتيجة الأولى للمسألة (٤)

إذا كانت $\mathbf{A}$ ترمز إلى مجال القوة المؤثرة على الجسيم ، إذن $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ هو الشغل المبذول في تحريك الجسيم حول مسار مغلق C والذى يمكن تعيينه بالقيمة $\nabla\times\mathbf{A}$. ومنها يأتى أنه فى حالة خاصة إذا كان $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ أو مكافئاً إذا كان $\mathbf{A} = \nabla\phi$ ، إذن فالتكامل حول مسار المغلق يساوى صفراً . وهذا يساوى قولنا أن الشغل المبذول فى تحريك الجسيم من نقطة فى المستوى إلى أخرى تكون مستقلة عن المسار فى المستوى الواصل بين النقط أو أن مجال القوة يكون تحفظياً (حافظ) . هذه النتائج قد وضحت لمجالات القوة والمنحنيات فى الفراغ (أنظر الفصل الخامس) .

عكسياً ، إذا كان التكامل مستقلا عن المسار الواصل بين نقطتين لمنطقة . أى أنه إذا كان التكامل حول أى مسار مغلق يساوى صفراً ، إذن $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. فى المستوى والشرط $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ يكافىء الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

حيث $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$.

٦ - احسب $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy$ along the path $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$

يكون الحساب المباشر صعباً . مع أنه بملاحظة أن $M = 10x^4 - 2xy^3,\ N = -3x^2y^2$ and $\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$

ينتج أن التكامل يكون مستقلا عن المسار . إذن يمكن استخدام أى مسار فمثلا المسار المكون من أجزاء من خط مستقيم من $(0,0)$ إلى $(2,0)$ ثم من $(2,0)$ إلى $(2,1)$

على طول مسار الخط المستقيم من $(0,0)$ إلى $(2,0)$ يكون $y = 0, dy = 0$ ويكون التكامل يساوى

$$\int_{x=0}^{2} 10x^4\, dx = 64$$

على طول مسار الخط المستقيم من $(2,0)$ إلى $(2,1)$ يكون $x = 2$, $dx = 0$ ويكون التكامل يساوى

$$\int_{y=0}^{1} -12y^2\, dy = -4$$

إذن القيمة المطلوبة للتكامل الخطى يساوى $64 - 4 = 60$

طريقة اخرى :

حيث $(10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy$ ، $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ يكون تكاملا مضبوطاً $(2x^5 - x^2y^3)$ إذن

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(2x^5 - x^2y^3) = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60$$

٧ - بين أن المساحة المحدودة بواسطة منحنى بسيط مغلق C يعطى بالمعادلة . $\frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$

فى نظرية جرين . ضع $M = -y, N = x$ إذن

$$\oint_C x\, dy - y\, dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\, dy = 2\iint_R dx\, dy = 2A$$

حيث A هى المساحة المطلوبة . لذلك $A = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$

٨ — أوجد مساحة القطع الناقص $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta.$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab$$

٩ — احسب $\oint_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$ حيث C

هو المثلث الموضح فى شكل ٦ — ٥

(أ) مباشراً

(ب) باستخدام نظرية جرين فى المستوى

(أ) على طول OA $dy = 0,\ y = 0,$

ويكون التكامل يساوى .

$$\int_0^{\pi/2} (0 - \sin x)\,dx + (\cos x)(0) = \int_0^{\pi/2} -\sin x\,dx$$

$$= \cos x\Big|_0^{\pi/2} = -1$$

شكل ٦ — ٥

على طول AB ، $x = \pi/2$ ، $dx = 0$ ويكون ألتكامل يساوى

$$\int_0^1 (y-1)0 + 0\,dy = 0$$

على طول BO ، $y = 2x/\pi$ ، $dy = 2/\pi\,dx$ ويكو التكامل يساوى

$$\int_{\pi/2}^0 \left(\frac{2x}{\pi} - \sin x\right)dx + \frac{2}{\pi}\cos x\,dx = \left(\frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi}\sin x\right)\Big|_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

إذا التكامل على طول $C = -1 + 0 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$

(ب)

و $M = y - \sin x,\ N = \cos x,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x,\ \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R (-\sin x - 1)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2} \left[\int_{y=0}^{2x/\pi} (-\sin x - 1)\,dy\right] dx = \int_{x=0}^{\pi/2} (-y\sin x - y)\Big|_0^{2x/\pi} dx$$

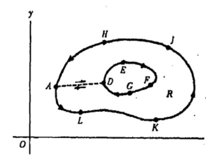
$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{2x}{\pi}\sin x - \frac{2x}{\pi}\right) dx = -\frac{2}{\pi}(-x\cos x + \sin x) - \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

فى اتفاق مع الجزء (أ)

لاحظ أنه توجد خطوط موازية لمحاور الإحداثيات (تتقاطع على محاور الأحداثيات فى هذه الحالة) تقابل C فى عدد لانهائى من النقط نظرية جرين فى المستوى مازالت صحيحة . وعموماً فالنظرية صالحة عندما تكون C مكونة من عدد محدود من أجزاء خط مستقيم .

١٠ – بين أن نظرية جرين فى المستوى أيضاً تكون صالحة للنقطة المتعددة الاتصال (شكل ٦ – ٦) .

المنطقة المظللة R ، المبينة فى الشكل تكون متعددة الاتصال حيث ليس كل منحنى مغلق يقع فى R يمكن أن ينكمش إلى نقطة بدون أن يترك R كما هو ملاحظ باعتبار منحنى يحيط $DEFGD$ مثلا . حدود المنطقة R المتكونة من الحدود الخارجية $AHJKLA$ والحدود الداخلية $DEFGD$ التى تتحرك فى الاتجاه الموجب بحيث أن شخص مسافر فى هذا الاتجاه تكون دائما المنطقة على يساره .



شكل ٦ – ٦

أوضحنا ان الاتجاه الموجب هو الموضح بشكل ٦–٦ .

لغرض تأسيس النظرية ، ارسم خطاً مثل AD يسمى قطعاً مستعرضاً يصل بين الحدود الخارجية والحدود الداخلية .

المنطقة المحاطة بواسطة $ADEFGDALKJHA$ تكون بسيطة الاتصال وبالتالى تكون نظرية جرين صالحة . إذن

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ولكن التكامل الذى على اليسار ، يترك التكامل ويكون مساوياً

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

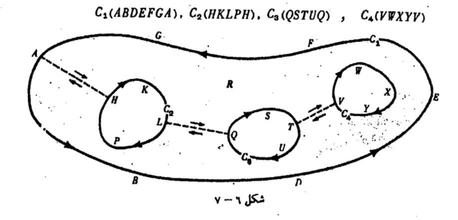
حيث $\int_{AD} = -\int_{DA}$ لذلك إذا كان C_1 هو المنحنى $ALKJHA, C_2$ و C_2 هو المنحنى $DEEGD$ و C هى الحدود للمنطقة R المتكونة من C_1 و C_2 (متحركة فى الاتجاه الموجب) .

إذن $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C}$ وبالتالى

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

١١ — بين أن نظرية جرين فى المستوى صالحة للمنطقة R لشكل ٦ — ٧ ، المحددة بواسطة المنحنى البسيط المغلق

$$C_1(ABDEFGA),\ C_2(HKLPH),\ C_3(QSTUQ)\ ,\ C_4(VWXYV)$$



شكل ٦ — ٧

كون القطاعات المستعرضة AH و LQ و TV . إذن المنطقة المحاطة بواسطة $AHKLQSTVWXYVTUQLPHA$- $BDEFGA$ هى منطقة بسيطة الاتصال وتنطبق عليها نظرية جرين . التكامل على هذه الحدود يسارى

$$\int_{AH} + \int_{HKL} + \int_{LQ} + \int_{QST} + \int_{TV} + \int_{VWXYV} + \int_{VT} + \int_{TUQ} + \int_{QL} + \int_{LPH} + \int_{HA} + \int_{ABDEFGA}$$

حيث التكاملات على AH و HA و LQ و QL و TV و VT تلغى فى أزواج وهذا يصبح

$$\int_{HKL} + \int_{QST} + \int_{VWXYV} + \int_{TUQ} + \int_{LPH} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \left(\int_{HKL} + \int_{LPH}\right) + \left(\int_{QST} + \int_{TUQ}\right) + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \int_{HKLPH} + \int_{QSTUQ} + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1} = \int_{C}$$

حيث C هي الحدود المكونة من C_1 و C_2 و C_3 و C_4 إذن

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

كما هو مطلوب .

١٢ – أثبت أن $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$ حول كل منحنى مغلق C فى منطقة بسيطة التوصيل إذا وإذا كان فقط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فى أى مكان فى المنطقة .

افترض أن M و N تكونا مستمرين ولهما مشتقات جزئية مستمرة ، فى أى مكان فى المنطقة R المحددة بـ C . بحيث أن نظرية جرين تكون قابلة للتطبيق . إذن

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فى R إذن يصبح $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$

وبالعكس . افترض $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$ لكل منحنيات C .

إذا كان $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$ عند النقطة P . إذن من استمرارية المشتقات نحصل على $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$ فى منطقة A المحاطة بـ P .

إذا كان Γ هي حدود A إذن

$$\oint_{\Gamma} M\,dx + N\,dy = \iint_{A} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$$

والتي تناقض الفرض أن التكامل الخطي يكون صفراً حول أي منحنى مغلق وبالمثل الفرض $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} < 0$ يؤدي إلى تناقض . لذلك $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$ عند كل النقط .

لاحظ أن الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ يكافىء الشرط $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ حيث $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$

(أنظر مسائل ١٠ و ١١ الفصل الخامس) التعميم لمنحنيات الفراغ . أنظر مسألة ٣١

١٣- ليكن $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ (أ) احسب $\nabla \times \mathbf{F}$ (ب) احسب $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ حول أي مسار مغلق واشرح النتائج

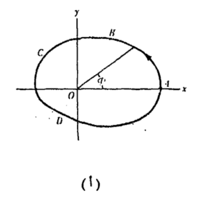
(أ) $$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$ في أي منطقة ما عدا $(0,0)$

(ب) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ ليكن $x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi$ حيث $(0,0)$ أحداثيات قطبية

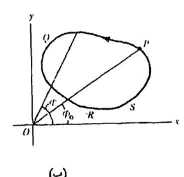
إذن $dy = \rho \cos \varphi\, d\varphi + d\rho \sin \varphi$ ، $dx = -\rho \sin \varphi\, d\varphi + d\rho \cos \varphi$

وهكذا $$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = d\varphi = d\left(\arc \tan \frac{y}{x}\right)$$

لمنحنى مغلق $ABCDA$ (شكل ٦ - ٨ (أ)) محيطاً بنقطة الأصل ، $\phi = 0$ عند A و $\phi = 2\pi$ بعد دورة كاملة تعود إلى A . في هذه الحالة التكامل الخطي يساوي $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$



(أ)



(ب)

شكل ٦ – ٨

لمنحنى مغلق $PQQSP$ (أنظر شكل ٦ – ٨ (ب) ولا يحيط بنقطة الأصل $\phi = \phi_0$ عند P و $\phi = \phi_0$ بعد دورة كاملة يعود إلى P . فى هذه الحالة التكامل الخطى يساوى $\int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi = 0$

حيث $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ تكافئ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ وتظهر النتائج كما لو أنها تناقض تلك التى فى مسألة ١٢ . على كل حال لا يوجد تناقض حيث $N = \frac{x}{x^2+y^2}$ و $M = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ليست لها مشتقات مستمرة خلال أى منطقة تحتوى $(0, 0)$ وقد فرض ذلك فى مسألة ١٢ .

نظرية التباعد :

١٤ – (أ) عبر عن نظرية التباعد فى عبارات و (ب) اكتب هذه النظرية فى الصيغة العمودية .

(أ) التكامل السطحى للمركبة العمودية للمتجه $\mathbf{A}$ مأخوذة على سطح مغلق مساو لتكامل التباعد للمتجه $\mathbf{A}$ مأخوذ على الحجم المغلق بالسطح .

(ب) ليكن $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ إذن $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$

الوحدة العمودية على S هى $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$. إذن $n_1 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha$, $n_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \cos\beta$ و $n_3 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \cos\gamma$ ، حيث α, β, γ هى الزوايا التى تصنعها $\mathbf{n}$ مع الاتجاه الموجب لكل من المحاور x, y, z أو مع الاتجاهات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بالتتالى . الكميات $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ هى جيوب تمام الاتجاه للعمود $\mathbf{n}$.

إذن

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}) \\ &= A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma \end{aligned}$$

ويمكن كتابة نظرية التباعد

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma)\, dS$$

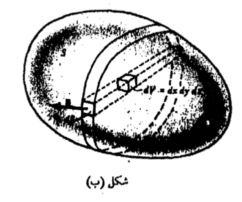
١٥ – وضح نظرية التباعد فيزيائياً

ليكن $\mathbf{A} = $ السرعة $\mathbf{v}$ عند أى نقطة لمائع متحرك من شكل ٦ – ٩ (ا) : حجم المائع الذى يعبر dS فى ثوان Δt

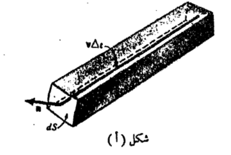
= الحجم المحتوى فى أسطوانة قاعدتها dS وارتفاعها المائل $\mathbf{v}\,\Delta t$

$$(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}\,dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS\,\Delta t$$

حينئذ ، حجم المائع الخارج فى الثانية $dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ٦ – ٩

الحجم الكلى فى الثانية [من شكل ٦ – ٩ (ب)] المائع الذى يمر فيه من السطح المغلق

$$= \iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

من مسألة ٢١ فصل ٤ ، $\nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$ هو حجم المائع الخارج فى الثانية من حجم العنصر dV . إذن

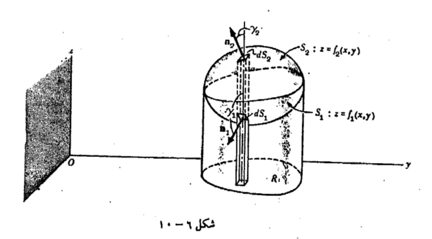
الحجم الكلى المائع الخارج فى الثانية من كل عناصر الحجم فى S

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV$$

لذلك

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV$$

١٦ – أثبت نظرية التباعد



شكل ٦ – ١٠

ليكن S سطحاً مغلقاً بحيث أن أى خط مواز لمحاور الأحداثيات يقطع S فى أكثر من نقطتين . افترض معادلات الأجزاء السفلى والعليا S_1 و S_2 لتكون $z = f_1(x, y)$ و $z = f_2(x, y)$ على الترتيب . بيين إسقاط السطح على المستوى xy .بالرمز R .

اعتبر

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dz\, dy\, dx = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right] dy\, dx$$

$$= \iint_R A_3(x,y,z) \Big|_{z=f_1}^{f_2} dy\, dx = \iint_R \left[A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1) \right] dy\, dx$$

الجزء الأعلى S_2 و $dy\, dx = \cos\gamma_2\, dS_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2\, dS_2$ حيث العمود $\mathbf{n}_2$ على S_2 يصنع زاوية حادة γ_2 مع $\mathbf{k}$.

للجزء الأسفل S_1 و $dy\,dx = -\cos\gamma_1\, dS_1 = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS_1$ حيث العمود $\mathbf{n}_1$ على S_1 يصنع زاوية مفتوحة γ_1 مع $\mathbf{k}$

إذن

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2$$

$$\iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = -\iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx - \iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2 + \iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$
$$= \iint_S A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

بحيث أن

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iint_S A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (١)$$

بالمثل ، بإسقاط S على محاور المستويات الأخرى

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\,dV = \iint_S A_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (٢)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\,dV = \iint_S A_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (٣)$$

بجمع (١) ، (٢) و (٣)

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

أو

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

يمكن أن تمتد النظرية للسطوح التي تكون أي خطوط موازية لمحاور الأحداثيات تقابلها في أكثر من نقطتين . لتأسيس هذا الامتداد ، قسم المنطقة المحاطة بـ S إلى مناطق أصغر سطحها يحقق هذا الشرط . الطريقة تشابه تلك التي استخدمت في نظرية جرين المستوى

١٧ – احسب $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ حيث $\mathbf{F} = 4xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ و S هي سطح المكعب المحدد بـ $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$

باستخدام نظرية التباعد يكون التكامل المطلوب مساوياً

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right] dV$$

$$= \iiint_V (4z - y)\, dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} (4z-y)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 2z^2 - yz\Big|_{z=0}^{1} dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (2-y)\, dy\, dx = \frac{3}{2}$$

يمكن أيضاً حساب التكامل السطحي مباشرة كما في مسألة ٢٣ فصل ٥

١٨ – برهن نظرية التباعد للمتجه $\mathbf{A} = 4x\,\mathbf{i} - 2y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ المأخوذ على المنطقة بواسطة $x^2 + y^2 = 4,\ z=0$ و $z=3$

تكامل الحجم $= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right] dV$

$$= \iiint_V (4 - 4y + 2z)\, dV = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{3} (4-4y+2z)\, dz\, dy\, dx = 84\pi$$

يتكون السطح S للأسطوانة من القاعدة $S_1\ (z=0)$ والقمة (الغطاء العلوى) $S_2\ (z=3)$ والجزء المحدب $S_3\,(x^2+y^2=4)$ حينئذ

التكامل السطحي $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_3$

على السطح $S_1\ (z=0)$، $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$، $\mathbf{A} = 4x\,\mathbf{i} - 2y^2\,\mathbf{j}$ و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$،

بحيث أن $\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_1 = 0$

على السطح On S_2 $(z = 3)$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $\mathbf{A} = 4x\,\mathbf{i} - 2y^2\,\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 9$, بحيث أن

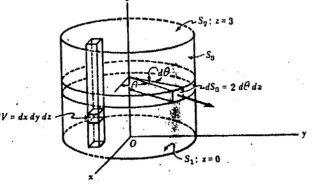
$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_2 = 9 \iint_{S_2} dS_2 = 36\pi, \text{ since area of } S_2 = 4\pi$$

على السطح S_3 $(x^2+y^2=4)$ العمود على $x^2+y^2=4$ يكون له الاتجاه $\nabla(x^2+y^2) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$

إذن الوحدة العمودية تساوى

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{2} \quad \text{since } x^2+y^2 = 4$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (4x\,\mathbf{i} - 2y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{2}\right) = 2x^2 - y^3$$



من شكل ٦ — ١١ $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $dS_3 = 2\,d\theta\,dz$ and so

$$\iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS_3 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3} \left[2(2\cos\theta)^2 - (2\sin\theta)^3\right] 2\,dz\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (48\cos^2\theta - 48\sin^3\theta)\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 48\cos^2\theta\,d\theta = 48\pi$$

إذاً التكامل السطحى = $0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$ ، يتفق مع تكامل الحجم ويحقق نظرية التباعد .

لاحظ أن حساب التكامل السطحى على S_3 أيضاً يمكن أن نحصل عليه بإسقاط S_3 على محاور المستويات xz أو yz

١٩ — إذا كانت $\text{div}\,\mathbf{A}$ ترمز إلى تباعد مجال المتجه $\mathbf{A}$ عند نقطة P وبين أن

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

حيث ΔV هو الحجم المحاط بالسطح ΔS والنهايات نحصل عليها بانكماش ΔV إلى النقطة P .

من نظرية التباعد

$$\iiint\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

من نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات ، الطرف الأيسر من المعادلة يمكن أن يكتب على الصورة

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} \iiint\limits_{\Delta V} dV = \overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}\; \Delta V$$

حيث $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$ هي قيمة متوسطة بين أكبر وأصغر قيمة للتباعد $\operatorname{div} \mathbf{A}$ خلال ΔV . إذن

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} = \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

بأخذ النهايات مثل $\Delta V \to 0$ بحيث أن P تكون دائماً داخل ΔV ، $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$ تقترب من القيمة $\operatorname{div} \mathbf{A}$ عند النقطة P ، وبالتالى

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

هذه النتيجة يمكن أن تؤخذ كنقطة بداية لتعريف التباعد للمتجه $\mathbf{A}$ ، ومنها يمكن اشتقاق الخواص بما فيها إثبات نظرية التباعد . فى فصل ٧ يستخدم هذا التعريف للتوسع فى مفهوم التباعد لمتجه فى نظام محاور مختلفة عن نظام المحاور العمودية فيزيائياً

$$\frac{\iint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

تمثل التدفق لكل وحدة الحجم للمتجه $\mathbf{A}$ من السطح ΔS . إذا كان $\operatorname{div} \mathbf{A}$ موجباً فى جيرة نقطة P يعنى ذلك أن السريان الخارج من P يكون موجباً وتسمى P مصدر بالمثل إذا كان $\operatorname{div} \mathbf{A}$ سالبة فى جيرة النقطة P يكون السريان حقيقة نحو P وتسمى بالمصب . إذا كان فى منطقة لا يوجد لها منابع أو مصبات . إذن $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ وتسمى $\mathbf{A}$ مجال المتجه اللولبى .

٢٠ – احسب $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS$ حيث S سطح مغلق

باستخدام نظرية التباعد

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)dV = 3\iiint_V dV = 3V$$

حيث V يكون هو الحجم المحاط بالسطح S

٢١ – أثبت $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$

ليكن $\mathbf{A} = \phi\nabla\psi$ فى نظرية التباعد . إذن

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\,dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

ولكن

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi(\nabla\cdot\nabla\psi) + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)$$

حيث

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\,dV = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\,dV$$

أو

$$\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\,dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S} \qquad (١)$$

حتى تثبت متطابقة جرين الأولى . بتبديل ϕ و ψ فى (١)

$$\iiint_V [\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)]\,dV = \iint_S (\psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S} \qquad (٢)$$

بطرح (٢) من (١) ، لدينا

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S} \qquad (٣)$$

التى تكون فى متطابقة جرين الثانية أو نظرية التماثل . فى الأثبات فرضاً أن ϕ و ψ تكون دوال عددية للموضع لها مشتقات مستمرة من الرتبة الثانية على الأقل .

٢٢ – أثبت

$$\iiint_V \nabla\phi\, dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$$

فى نظرية التباعد ، ليكن $\mathbf{A} = \phi\mathbf{C}$ حيث $\mathbf{C}$ متجه ثابت .

إذن

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\mathbf{C})\, dV = \iint_S \phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

حيث $\nabla\cdot(\phi\mathbf{C}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\nabla\phi$ and $\phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})$,

$$\iiint_V \mathbf{C}\cdot\nabla\phi\, dV = \iint_S \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})\, dS$$

بأخذ $\mathbf{C}$ خارج التكاملات

$$\mathbf{C}\cdot\iiint_V \nabla\phi\, dV = \mathbf{C}\cdot\iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$$

وحيث $\mathbf{C}$ متجه اختيارى ثابت

$$\iiint_V \nabla\phi\, dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$$

٢٣ – أثبت

$$\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\, dV = \iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\, dS$$

من نظرية التباعد ، ليكن $\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}$ حيث $\mathbf{C}$ يكون متجهاً ثابتاً .

إذن

$$\iiint_V \nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\, dV = \iint_S (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{n}\, dS$$

حيث $\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$ and $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{n}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B})$,

$$\iiint_V \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\,dV = \iint_S \mathbf{C}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B})\,dS$$

بأخذ $\mathbf{C}$ خارج التكاملات

$$\mathbf{C}\cdot\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\,dV = \mathbf{C}\cdot\iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\,dS$$

حيث $\mathbf{C}$ متجه ثابت اختياري

$$\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\,dV = \iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\,dS$$

٢٤ – بين أنه عند أى نقطة

(أ) $$\nabla\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$ و (ب) $$\nabla\times\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\mathbf{n}\times\mathbf{A}\,dS}{\Delta V}$$

حيث ΔV يكون هو الحجم المحاط بالسطح ΔS والنهاية تحصل عليها بانكماش الحجم ΔV إلى النقطة P

(أ) من المسألة ٢٢ و $\iint_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\,dS = \iiint_{\Delta V}\nabla\phi\,dV$ حينئذ $\iint_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS = \iiint_{\Delta V}\nabla\phi\cdot\mathbf{i}\,dV$

باستخدام نفس الأساس المستخدم فى المسألة ١٩ نحصل على

$$\overline{\nabla\phi\cdot\mathbf{i}} = \frac{\iint_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS}{\Delta V}$$

حيث $\Delta\phi.\mathbf{i}$ تكون قيمة متوسطة بين أكبر وأصغر قيمة $\nabla\phi.\mathbf{i}$ خلال ∇V بأخذ النهايات $\Delta V\to 0$ بحيث أن P تكون دائماً داخل ΔV و $\mathbf{j},\mathbf{j},\mathbf{k}$ تقترب من القيمة

$$\nabla\phi\cdot\mathbf{i} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_S \phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS}{\Delta V} \qquad (١)$$

بالمثل نجد

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, dS}{\Delta V} \qquad (٢)$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS}{\Delta V} \qquad (٣)$$

بضرب (١) ، (٢) ، (٣) بالكيات $\mathbf{k}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}$ بالتتالى والجمع استخدم

$$\nabla\phi = (\nabla\phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

(أنظر مسألة ٢٠ فصل ٢) نحصل على النتيجة .

(ب) من مسألة ٢٣ استبدل $\mathbf{B}$ محل $\mathbf{A}$ ، $\iiint_{\Delta V} \nabla \times \mathbf{A} \, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS$

إذن كما فى الجزء (أ) يمكننا أن نرى .

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} \, dS}{\Delta V}$$

بالمثل يمكن الحصول على النتائج مع احلال $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ محل $\mathbf{i}$ بالضرب فى $\mathbf{k}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}$ والجمع نحصل على النتيجة .

النتائج التى حصلنا عليها يمكن أن تؤخذ كنقطة بداية لتعريف كل من الانحدار والالتفاف ، باستخدام هذا التعريف يمكن التوسع فى نظم المحاور لتشمل محاور مختلفة عن المحاور العمودية ؛

٢٥ — كون عامل التكافؤ .

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint_{\Delta S} dS \, \circ$$

حيث $\circ$ تبين الضرب العددى أو الضرب المتجهى أو الضرب العادى

لتكوين المكافىء ، نتائج العمليات على مجال المتجه أو المجال العددى يجب أن تكون فى توافق متماسك مع النتائج السابق الحصول عليها .

إذا كانت $\circ$ تبين الضرب العددى ، إذاً فللمتجه $\mathbf{A}$.

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \mathbf{A}$$

أو

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

المكون فى مسألة ١٩ .

بالمثل إذا كانت $\circ$ تبين الضرب المتجهى .

$$\operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$$

المكون فى مسألة (٢٤ – ب) .

أيضاً إذا كانت $\circ$ تبين الضرب العادى ، إذاً لكمية عددية ϕ .

$$\nabla \circ \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \phi \quad \text{or} \quad \nabla \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \phi\, d\mathbf{S}$$

المكون فى مسألة (٢٤ – أ) .

٢٦ – ليكن S سطحاً مغلقاً وليكن $\mathbf{r}$ يرمز إلى متجه الموضع لأى نقطة (x ، y ، z) قيست من نقطة أصل . اثبت أن :

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\, dS$$

تكون مساوياً (أ) صفراً إذا كان O تقع خارج S (ب) 4π إذا كان O تقع داخل S تعرف هذه النتيجة بنظرية جاوس .

(أ) من نظرية التباعد $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,dV$

لكن $\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ (مسألة ١٩ فصل ٤) فى أى مكان داخل V بفرض $r \neq 0$ فى V . أى أن بفرض O تكون خارج V وبالتالى تكون خارج S . إذن $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = 0$

(ب) إذا كانت O داخل s . أحط O بكرة صغيرة نصف قطرها a . ليكن τ ترمز إلى المنطقة المحددة بالسطح S و s إذن من نظرية التباعد .

$$\iint_{S+s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = \iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS + \iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = \iiint_\tau \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,dV = 0$$

حيث $r \neq 0$ فى τ . لذلك

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS$$

الآن على s , $r = a$, $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$ حيث أن $\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{(-\mathbf{r}/a)\cdot\mathbf{r}}{a^3} = -\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$ ،

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = \iint_s \frac{1}{a^2}\,dS = \frac{1}{a^2}\iint_s dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

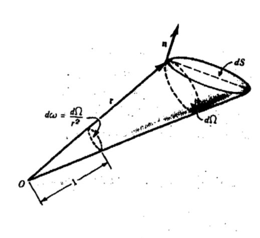
٢٧ — اشرح نظرية جاوس (مسألة ٢٦) هندسياً .

ليكن dS ترمز إلى عنصر من مساحة السطح وتصل كل النقط على حدود dS إلى O (شكل ٦ — ١٢) ، وبهذا تكون مخروطاً ليكن $d\Omega$ هى مساحة جزء من كرة مركزها O ونصف قطرها r ومقطوعة بهذا المخروط . إذن الزاوية المجسمة المقابلة بعنصر السطح dS عند O تعرف كالآتى :

$d\omega = d\Omega/r^2$ ، وتكون عددياً مساوياً لمساحة الجزء من الكرة التى مركزها O ونصف قطرها الوحدة ومقطوعة بالمخروط . ليكن $\mathbf{n}$ وحدة العمود الموجب على dS وتسمى θ الزاوية بين $\mathbf{n}$ و $\mathbf{r}$ إذن : $\cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r}$ أيضاً

$$d\Omega = \pm\, dS\cos\theta = \pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r}\,dS$$

بحيث أن $d\omega = \pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS$. الموجب (+) أو السالب (−) اختيروا تبعاً لما إذا كان $\mathbf{n}$ و $\mathbf{r}$ تكون زاوية حادة أو منفرجة θ مع بعضهما .



شكل ٦ — ١٢

ليكن S عبارة عن سطح . شكل (٦ – ١٣ - أ) بحيث أن أى خط يقابل S فى أكثر من نقطتين . إذا كان O

تقع خارج S ، إذن عند موضع مثل 1 $\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = d\omega$ معتبراً أنه عند الموضع المناظر 2 .

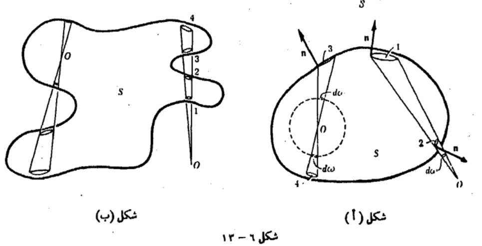
$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = -d\omega$ التكامل على هاتين المنطقتين يعطى صفرا . حيث أن الاسهام للزاوية المجسمة تلغى عند إجراء التكامل

على السطح S نحصل على $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = 0$ ، حيث أنه لكل اسهام موجب يوجد واحد سالب .

فى حالة O داخل S بالرغم من أن عند موضع مثل ٣، $\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = d\omega$ وعند ٤ $\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = d\omega$

بحيث أن الاسهام يضيف بدلا من أن يلغى الزاوية المجسمة الكلية فى هذه الحالة تسوى مساحة وحدة الكرة التى هى 4π ،

بحيث أن $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = 4\pi$



شكل (أ) شكل (ب)

شكل ٦ – ١٣

السطح S بحيث أنه إذا قابل خط S فى أكثر من نقطتين فإن وضعاً مماثلا بالضبط يكون صالحاً كما هو مبين فى شكل ٦ – ١٣ (ب) إذا كانت O خارج S مثلا إذن المخروط الذى رأسه عند O يقطع S فى عدد زوجى من الأماكن والاسهام لتكامل السطح يساوى صفراً حيث الزاوية المجسمة المقابلة O تشطب فى أزواج . إذا كانت O داخل S رغماً عن ، المخروط يكون رأسه عند O يقطع S فى عدد فردى من الأماكن حيث أن الالغاء يقع فقط للأعداد الزوجية لها ، يوجد دائماً اسهام قيمته 4π للسطح الداخل S

٢٨ – مائع له الكثافة $\rho(x, y, z, t)$ يتحرك بسرعة $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ إذا كان لايوجد منابع أو مصبات . اثبت أن :

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

اعتبر سطحاً اختيارياً يحيط حجم مائع V . عند أى زمن تكون كتلة المائع التى فى حجم V هى :

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

معدل زمن الزيادة لهذه الكتلة هى :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

كتلة المائع لكل وحدة زمن تترك V هى :

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(أنظر مسألة ١٥) ومعدل الزيادة فى الكتلة تكون حينئذ :

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

إذن من نظرية التباعد

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

أو

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

حيث تكون V اختيارية . المتكامل مفترضاً مستمراً ، يجب أن تكون بالتطابق صفراً . باستخدام تعليل مشابه المستخدم فى المسألة ١٢ . إذن :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

تسمى هذه المعادلة معادلة استمرار . إذا كانت ρ ثابتة ، يكون المائع غير قابل للانضغاط و $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ أى أن $\mathbf{v}$ تكون لولبية .

معادلة الاستمرار أيضاً مستخدمة فى النظرية الكهرومغناطيسية حيث ρ كثافة الشحنة و $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ تكون كثافة التيار الكهربى .

٢٩ – إذا كانت درجة الحرارة عند أى نقطة (x, y, z) لجسم صلب عنا زمن t يكون $U(x, y, z, t)$ وإذا كان κ, ρ و c على الترتيب ، معامل التوصيل الحرارى ، الكثافة و الحرارة النوعية للجسم الصلب بفرض أنها ثابتة ، بين أن :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \nabla^2 U \quad \text{حيث} \quad k = \kappa/\rho c$$

ليكن V هو حجم اختيارى واقع فى الجسم الصلب ، ولتكن S ترمز إلى سطحه ، معدل تدفق الحرارة عبر S أو كية الحرارة التى تترك لكل وحدة زمن هى :

$$\iint_S (-\kappa \nabla U) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

لذلك كيه الحرارة الداخلة S لكل وحدة زمن هى

$$\iint_S (\kappa \nabla U) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \, dV \qquad (1)$$

من نظريه التباعد . الحرارة الموجودة فى الحجم V تعطى بالمعادله

$$\iiint_V c\rho \, U \, dV$$

إذن معدل زيادة الحرارة يكون :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c\rho \, U \, dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dV \qquad (2)$$

بتساوى الأطراف اليمنى لكل من (١) ، (٢)

$$\iiint_V \left[c\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \right] dV = 0$$

وحيث V تكون اختيارية ، المتكامل ، المفترض مستمراً يجب أن تكون بالتطابق صفراً حيث أن :

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla U)$$

أو إذا كانت ρ و c و κ ثوابت

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \nabla \cdot \nabla U = k \nabla^2 U$$

الكمية k تسمى الانتشارية . فى حالة استقرار انتقال الحرارة (أى أن $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ أو U مستقلة عن الزمن)

تئول المعادلة إلى معادلة لا بلاس $\nabla^2 U = 0$.

نظرية ستوكس :

٣٠ – (أ) عبر عن نظرية ستوكس فى كلمات (ب) اكتبها فى الصيغة العمودية

(أ) التكامل الخطى المركبة المماسية لمتجه $\mathbf{A}$ مأخوذة حول منحنى مغلق بسيط C تساوى تكامل السطح للمركبة العمودية لالتفاف $\mathbf{A}$ مأخوذة على أى سطح S له المحدود C .

(ب) كما فى (مسألة ١٤ ب)

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

إذن

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

وتصبح نظرية ستوكس

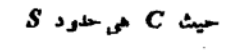
$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS = \oint_C A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

٣١ – اثبت نظرية ستوكس .

لتكن S سطح حيث أن إسقاطه على المستويات xy و yz و xz تكون مناطق محددة بمنحنيات بسيطة مغلقة . شكل ٦ – ١٤ افترض S يمكن تمثيلها بالمعادلات $z=f(x,y)$ أو $x=g(y,z)$ أو $y=h(x,z)$ حيث f, g, h هى دوال ذات قيم فردية ، مستمرة وقابلة للتفاضل لابد أن نبين أن :

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$



حيث C هي حدود S

اعتبر أولا $\iint_S [\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS$

حيث

شكل ٦ - ١٤

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k}$$

$$[\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right) dS \qquad (١)$$

إذا كان $z = f(x,y)$ مأخوذة كمعادلة السطح S ، إذن المتجه الموضعي لأى نقطة S تكون $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ حيث أن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$. لكن $\partial \mathbf{r}/\partial y$ هى متجه مماسى للسطح (أنظر مسألة ٢٥ فصل ٣) وتكون بالتالى عمودية على $\mathbf{n}$ حيث أن :

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 0 \quad \text{أو} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$$

بالتعويض فى المعادلة (١) نحصل على

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right) dS = \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right) dS$$

أو

$$[\nabla \times (A_1 \mathbf{i})] \cdot \mathbf{n} \, dS = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \, dS \qquad (٢)$$

الآن على السطح ،

$$A_1(x,y,z) = A_1(x,y,f(x,y)) = F(x,y)\text{; hence } \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ and (2) becomes}$$

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

إذن

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_R -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

حيث R هى إسقاط S على المستوى xy . من نظرية جرين المستوى فإن التكامل الأخير يساوى $\oint_\Gamma F\,dx$

حيث Γ هى حدود R . حيث أنه عند كل نقطة (x, y) الحدود Γ قيمة F هى نفس قيمة A_1 عند أى نقطة (x, y, z) من C وحيث dx لها نفس القيمة لكل من المنحنيين ويجب أن يكون :

$$\oint_\Gamma F\,dx = \oint_C A_1\,dx$$

أو

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_1\,dx$$

بالمثل وبالإسقاط على محاور المستويات الأخرى .

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_2\mathbf{j})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_2\,dy$$

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_3\,dz$$

لذلك بالجمع

$$\iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

تكون النظرية أيضاً صحيحة للأسطح S التي لاتحقق القيود الموضوعة سابقاً . بفرض أن S يمكن تقسيمها إلى أسطح $S_1, S_2, \ldots S_k$ لها الحدود $C_1, C_2, \ldots C_k$ والتي تحقق القيود . إذن نظرية ستوكس تكون صالحة لكل سطح . بجمع تكاملات السطوح هذه فالتكامل السطحي الكلي على S يمكن الحصول عليه . بجمع التكاملات الخطية المناظرة على $C_1, C_2, \ldots C_k$ نحصل على التكامل الخطي على C .

٣٢ – حقق نظرية ستوكس للمتجه $\mathbf{A} = (2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ حيث S نصف السطح العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ و C هي حدودها .

الحدود C للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها واحد ومركزها عند نقطة الأصل . ليكن $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0,\ 0 \leqq t < 2\pi$ هي المعادلة البارامترية للحدود C . إذن :

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (2x-y)\,dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)\,dt = \pi$$

أيضاً

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

إذن :

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R dx\,dy$$

حيث $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS = dx\,dy$ و R هي إسقاط S على المستوى xy هذا التكامل الأخير يساوى .

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$$

وتكون نظرية ستوكس قد أثبتت .

٣٣ – اثبت أن الشرط اللازم والكافي أن $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ لكل منحنى مغلق C هو $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ مطابقاً .

الكفاية . افترض $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ إذن من نظرية ستوكس .

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

الضرورة (اللازم) افترض $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ حول كل مسار مغلق C وافترض $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ عند نقطة ما P إذن بفرض $\nabla \times \mathbf{A}$ تكون مستمرة ستوجد منطقة وتكون P كنقطة داخلية فيها ، حيث $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ليكن S سطح محتوى فى هذه المنطقة التى العمود عليها $\mathbf{n}$ عند كل نقطة له نفس الاتجاه مثل $\nabla \times \mathbf{A}$ أى أن $\nabla \times \mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{n}$ حيث α ثابت موجب ليكن C هى حدود S إذن من نظرية ستوكس .

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\, dS = \alpha \iint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\, dS > 0$$

وهذا يناقض الفرض أن $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ ويبين أن $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

وينتج أن $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ هو أيضاً شرط لازم وكاف التكامل الخطى $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ ليكون مستقلا عن المسار الواصل بين النقط P_1 و P_2 (أنظر مسائل ١٠ و ١١ – الفصل الخامس) .

٣٤ – اثبت أن : $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\, dS$

فى نظرية ستوكس ، ليكن $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ حيث $\mathbf{C}$ متجه ثابت .

إذن

$$\oint d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \iint_S [\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$\oint \mathbf{C}\cdot(d\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$\mathbf{C}\cdot\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B} = \iint_S [(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n}\, dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S \mathbf{C}\cdot[\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})]\, dS - \iint_S \mathbf{C}\cdot[\mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\, dS$$

$$= \mathbf{C}\cdot\iint_S [\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\, dS = \mathbf{C}\cdot\iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\, dS$$

حيث $\mathbf{C}$ متجه اختيارى ثابت $\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\, dS$

٣٥ – إذا كان ΔS سطحاً محدداً بمنحنى مغلق بسيط C و P أى نقطة للسطح ΔS وليست على C و $\mathbf{n}$ تكون وحدة العمود على ΔS عند P ، بين أنه عند P

$$(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

حيث أخذت النهاية بطريقة بحيث أن ΔS تنكمش إلى النقطة P

من نظرية ستوكس
$$\iint_{\Delta S} (\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

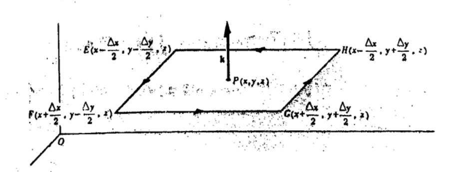
باستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات كما فى مسائل ١٩ ، ٢٤ يمكن أن تكتب المعادلة على الصورة .

$$\overline{(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

وتحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ النهاية كالآتى $\Delta S \to 0$.

يمكن استخدام ذلك كنقطة بداية لتعريف الالتفاف curl A (أنظر مسألة ٣٦) وهى مفيدة فى الحصول على التفاف curl A فى نظم الاحداثيات المختلفة عن العمودية . حيث $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ تسمى الدوران للمتجه $\mathbf{A}$ حول C ، فإن المركبة العمودية للالتفاف يمكن شرحها فيزيائياً كنهاية الدوران لكل وحدة مساحة ولذلك فحساب الدوران بعبارة أخرى للمتجه (rot A) بدلا من التفاف curl A .

٣٦ – إذا كان التفاف curl A معرف تبعاً لطريقة النهايات كما فى مسألة ٣٥ . أوجد المركبة z للالتفاف curlA .



شكل ٦ – ١٥

ليكن $EFGH$ مستطيلا يوازى المستوى xy له النقطة الداخلية $P(x, y, z)$ أخذت كنقطة متوسطة كما بشكل ٦ — ١٥ : ليكن A_1 و A_2 هى مركبات المتجه $\mathbf{A}$ عند P فى الاتجاه الموجب x و y على الترتيب .

إذا كانت C هى حدود المستطيل ، إذن

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{EF} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{FG} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{GH} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{HE} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

ولكن

$$\int_{GH} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -(A_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y)\Delta x \qquad \int_{EF} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y)\Delta x$$

$$\int_{HE} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -(A_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x)\Delta y \qquad \int_{FG} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x)\Delta y$$

ماعدا الأجزاء متناهية الصغر ذات رتبة أعلى من $\Delta x\,\Delta y$

بالجمع ، لدينا تقريباً

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\Delta x\,\Delta y$$

إذن ، حيث $\Delta S = \Delta x\,\Delta y$.

مركبة z للالتفاف $\mathbf{A}$ =

$$(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{k} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\Delta x\,\Delta y}{\Delta x\,\Delta y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}$$

مسائل متنوعة

٣٧ – حقق نظرية جرين فى المستوى $\oint_C (3x^2-8y^2)dx + (4y-6xy)dy$ حيث C هى حدود المنطقة المعرفة بواسطة

(أ) $y = \sqrt{x},\ y = x^2$ (ب) $x=0,\ y=0,\ x+y=1$

الجواب (أ) قيمة مشتركة $= 3/2$ (ب) قيمة مشتركة $= 5/3$

٣٨ – احسب $\oint_C (3x+4y)dx + (2x-3y)dy$ حيث C دائرة نصف قطرها 2 ومركزها عند نقطة الأصل المستوى xy، تحركت فى الاتجاه الموجب . الجواب . -8π

٣٩ – أعد حل المسألة السابقة للتكامل الخطى $\oint_C (x^2+y^2)dx + 3xy^2\,dy$ الجواب . 12π

٤٠ – احسب $\oint (x^2-2xy)dx + (x^2y+3)dy$ حول الحدود للمنطقة المعرفة بالمعادلة $y^2 = 8x$ و $x = 2$

(أ) مباشرة (ب) باستخدام نظرية جرين الجواب . $128/5$

٤١ – احسب $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy-y^2)dx + (3x^2-2xy)dy$ على طول الدويرى $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1-\cos\theta$

الجواب . $6\pi^2 - 4\pi$

٤٢ – احسب $\oint (3x^2+2y)dx - (x+3\cos y)dy$ حول متوازى الأضلاع الذى رؤوسه عند $(0,0)$ و $(2,0)$ و $(1,1)$ الجواب . -6

٤٣ – أوجد المساحة المحددة لقوس واحد من الدويرى $x = a(\theta-\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta),\ a>0$ ومحور x .

الجواب $3\pi a^2$

٤٤ – أوجد المساحة المحددة بالمنحنى الدويرى النجمى $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3},\ a>0$.

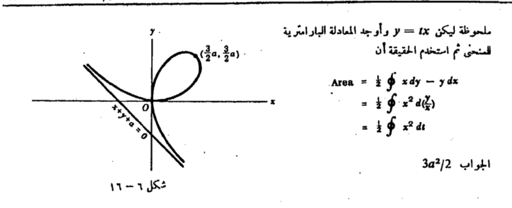
ملحوظة : المعادلة البارامترية هى $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ الجواب $3\pi a^2/8$

٤٥ – بين أنه فى الأحداثيات القطبية (ρ, ϕ) التعبير $x\,dy - y\,dx = \rho^2 d\phi$. اشرح $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$

٤٦ – أوجد مساحة الأنشوطة لوردة ذات الأربع ورقات $\rho = 3\sin 2\phi$. الجواب $9\pi/8$

٤٧ – أوجد مساحة كل من أنشوطتين المنحنى ذى عروتين $\rho^2 = a^2\cos 2\phi$. الجواب a^2

٤٨ – أوجد مساحة أنشوطة القوس الورقى لديكارت $x^3+y^3 = 3axy,\ a>0$. (أنظر شكل ٦ – ١٦)



شكل ٦ – ١٦

ملحوظة ليكن $y = tx$ وأوجد المعادلة البارامترية للمنحنى ثم استخدم الحقيقة أن

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint x^2\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\oint x^2\, dt$$

الجواب $3a^2/2$

٤٩ – حقق نظرية جرين فى المستوى للمعادلة $\oint_C (2x-y^3)dx - xy\,dy$ حيث C هى حدود المنطقة المحاطة بالدوائر $x^2+y^2 = 1$ and $x^2+y^2 = 9$ الجواب : قيمة مشتركة $= 60\pi$

٥٠ – احسب $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ على المسارات الآتية :

(أ) خط مستقيم مقطع من $(1,0)$ إلى $(1,1)$ ثم إلى $(-1,1)$ ثم إلى $(-1,0)$.

(ب) خط مستقيم مقطع من $(1,0)$ إلى $(1,-1)$, ثم إلى $(-1,-1)$ ثم إلى $(-1,0)$.

بين أنه ولو أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ يكون التكامل الخطى معتمداً على المسار الواصل بين $(1,0)$ إلى $(-1,0)$ واشرح

الجواب : (أ) π (ب) $-\pi$

٥١ – بتغيير المتغيرات من (x, y) إلى (u, v) تبعاً للتحول $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ بين أن المساحة A للمنطقة R المحددة بمنحنى بسيط مغلق C يعطى كالآتى

$$A = \iint_R \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv \quad \text{حيث} \quad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

هو الجاكوبيان لقيم x و y بالنسبة إلى u و v . ما هى القيود التى يجب أن توضع ؟ وضح النتيجة حيث u و v أحداثيات قطبية

تنويه : استخدم النتيجة . $A = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$ حول إلى أحداثيات u و v ثم استخدم نظرية جرين

٥٢ – احسب $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ حيث $\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$ و S تكون :

(أ) سطح متوازى المستطيلات محدد بالآتى $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1$ و $z = 3$

(ب) سطح المنطقة المحددة بالتالى $x = 0, y = 0, y = 3, z = 0$ و $x + 2z = 6$

الجواب (أ) 30 (ب) 351/2

٥٣ – حقق نظرية التباعد أن $A = 2x^2y\,i - y^2\,j + 4xz^2\,k$ المأخوذة على المنطقة التى فى الثمن الأول والمحددة بالتالى $y^2+z^2=9$ و $x=2$ الجواب : 180

٥٤ – احسب $\iint_S r\cdot n\,dS$ حيث (أ) S هى كرة نصف قطرها 2 ومركزها عند $(0,0,0)$ و (ب) S سطح المكعب محدد بما يلى : $x=-1, y=-1, z=-1, x=1, y=1, z=1$ (جـ) S هى السطح المحدد بواسطة جسم القطع المكافىء الدورانى $z=4-(x^2+y^2)$ والمستوى xy الجواب (أ) 32π (ب) 24 (جـ) 24π

٥٥ – إذا كانت S أى سطح مغلق يحتوى حجم V و $A = ax\,i + by\,j + cz\,k$ أثبت أن $\iint_S A\cdot n\,dS = (a+b+c)V$

٥٦ – إذا كان $H = \text{curl}\,A$ أثبت أن $\iint H\cdot n\,dS = 0$ لأى سطح مغلق S .

٥٧ – إذا كان n هى وحدة العمود المرسوم إلى الخارج على أى سطح مغلق له المساحة S ، بين أن $\iiint_V \text{div}\,n\,dV = S$

٥٨ – أثبت أن $\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{r\cdot n}{r^2}\,dS$

٥٩ – أثبت $\iint_S r^5 n\,dS = \iiint_V 5r^3 r\,dV$

٦٠ – أثبت $\iint_S n\,dS = 0$ لأى سطح مغلق S .

٦١ – بين أن مطابقة جرين الثانية يمكن أن تكتب $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dV = \iint_S (\phi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\phi}{dn})\,dS$

٦٢ – أثبت $\iint_S r\times dS = 0$ لأى سطح مغلق S .

٦٣ – حقق نظرية ستوكس للمتجه $A = (y-z+2)\,i + (yz+4)\,j - xz\,k$ حيث S هو سطح المكعب $x=0,\ y=0,\ z=0$, $y=2,\ z=2$ فوق المستوى xy الجواب : قيمة مشتركة $= -4$

٦٤ – حقق نظرية ستوكس للقيمة $F = xz\,i - y\,j + x^2y\,k$ ، حيث S هى سطح المنطقة المحددة بواسطة $y=0, z=0, 2x+y+2z=8$ التى لا يحتويها المستوى xz الجواب : قيمة مشتركة $= 32/3$

٦٥ – احسب $\iint_S (\nabla\times A)\cdot n\,dS$ حيث $A = (x^2+y-4)\,i + 3xy\,j + (2xz+z^2)\,k$ و S هى السطح

(أ) نصف الكرة $x^2+y^2+z^2=16$ فوق المستوى xy .

(ب) جسم القطع المكافىء الدورانى $z = 4-(x^2+y^2)$ فوق المستوى xy .

الجواب : (أ) -16π (ب) -4π

٦٦ – إذا كان $\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - (x+3y-2)\,\mathbf{j} + (x^2+z)\,\mathbf{k}$ احسب $\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS$ على السطح المتقاطع بين الأسطوانتين $x^2+y^2=a^2$ ، $x^2+z^2=a^2$ الموجودة فى الثمن الأول الجواب $-\frac{a^2}{12}(3\pi+8a)$

٦٧ – المتجه $\mathbf{B}$ دائماً عمودى على سطح مغلق معلوم S . بين أن $\iiint_V \operatorname{curl}\mathbf{B}\,dV = 0$ حيث V هى المنطقة المحددة بالسطح S .

٦٨ – إذا كان $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ حيث S أى سطح محدد بالمنحنى C ، بين أن $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$

٦٩ – أثبت $\oint_C \phi\,d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$

٧٠ – استخدم العامل التكافوئى لحل مسألة ٢٥ لتصل إلى (أ) $\nabla\phi$ (ب) $\nabla\cdot\mathbf{A}$ (جـ) $\nabla\times\mathbf{A}$ فى الأحداثيات العمودية .

٧١ – أثبت $\iiint_V \nabla\phi\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \phi\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iiint_V \phi\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$

٧٢ – لتكن $\mathbf{r}$ أى متجه موضعى لأى نقطة بالنسبة إلى الأصل O افترض ϕ لها مشتقات مستمرة من الرتبة الثانية على الأقل وليكن حجم V محدد بسطح مغلق S . بين ϕ عند O بواسطة ϕ_0 بين أن

$$\iint_S \left[\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\nabla^2\phi}{r}\,dV + \alpha$$

حيث $\alpha = 0$ أو $4\pi\phi_0$ تبع ما إذا كان O داخل أو خارج S .

٧٣ – الجهد $\phi(P)$ عند نقطة $P(x,y,z)$ تبعاً لنظام شحنات (أو كتل) $q_1, q_2, \ldots, q_n$ له المتجهات الموضعية $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ بالنسبة إلى النقطة P تعطى بالعلاقة

$$\phi = \sum_{m=1}^{n} \frac{q_m}{r_m}$$

أثبت قانون جاوس $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$

حيث $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ هى شدة المجال الكهربى ، S هى السطح المحتوى كل الشحنات و $Q = \sum_{m=1}^{n} q_m$ هى الشحنة الكلية فى S

٧٤ – إذا كانت المنطقة V المحددة بالسطح S لها شحنات (أو كتل) مستمرة موزعة بكثافة ρ الجهد $\phi(P)$ تعرف بواسطة $\phi = \iiint_V \frac{\rho\,dV}{r}$ استنتج الآتى تحت فروض مناسبة .

(أ) $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\iiint_V \rho\,dV$ حيث $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

(ب) $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ (معادلة بوسون) عند كل نقط P حيث توجد الشحنات و $\nabla^2\phi = 0$ (معادلة لابلاس) حيث لا توجد شحنات .

الفصل السابع

احداثيات منحنى الاضلاع

تحول الاحداثيات : لتكن الأحداثيات العمودية (x, y, z) لأى نقطة يعبر عنها كدالة فى (u_1, u_2, u_3) بحيث أن :

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{١}$$

نفرض أن المعادلة (١) يمكن أن تحل فى u_1, u_2, u_3 بدلالة (x, y, z) أى أن :

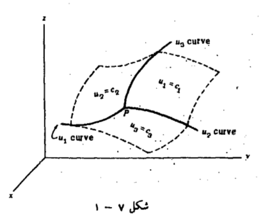
$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z) \tag{٢}$$

الدوال فى معادلات (١) و (٢) فرضت أن لها قيمة فردية ولها مشتقات مستمرة بحيث أن التناظر بين (x, y, z) و (u_1, u_2, u_3) يكون وحيداً (فريداً) . عمليا فإن هذا الفرض يجوز أن لا يطبق عند نقط معينة ويتطلب اعتبارات خاصة .

أعطيت نقطة P بالاحداثيات العمودية(x, y, z) ويمكننا من الصيغة (٢) أرفاق مجموعة وحيدة من الاحداثيات(u_1, u_2, u_3) تسمى احداثيات منحنى الأضلاع للنقطة P . مجموعة المعادلات (١) أو (٢) تعرف باحداثيات التحول .

احداثات منحنى الاضلاع المتعامدة :

السطوح $u_1 = c_1$ ، $u_2 = c_2$ ، $u_3 = c_3$ حيث c_1 ، c_2 ، c_3 ، تكون ثوابت تسمى احداثيات السطوح وكلّ زوج من هذه السطوح تتقاطع فىمنحنيات تسمى احداثى المنحنيات أو الخطوط شكل ٧ – ١ . إذا تقاطعت احداثيات السطوح فى زوايا قائمة يسمى نظام احداثيات منحنى الأضلاع احداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة . احداثيات المنحنيات u_1 ، u_2 ، u_3 لنظام منحنى الأضلاع تشابه محاور الاحداثيات x, y, z فى نظام الإحداثيات العمودية .

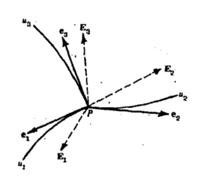


شكل ٧ – ١

وحدة المتجه فى نظم منحى الاضلاع : ليكن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ متجه الموضع للنقطة P . إذن المعادلة (١) يمكن كتابتها على الصورة $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. متجه المماس للمنحنى u_1 عند P (التى لها u_3 و u_2 ثوابت) هى $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$ إذن وحدة المتجه المماس فى هذا الاتجاه تكون $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|$ حيث أن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1$ حيث $h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|$. بالمثل ، إذا كان $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_2$ هى وحدة المتجهات المماسية لمنحيات u_3 و u_2 عند النقطة P على الترتيب

إذن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2$ و $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3$ حيث $h_2 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right|$ و $h_3 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$. الكميات h_1, h_2, h_3 تسمى معاملات المقياس . وحدة المتجهات $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ هي اتجاهات تزايد u_1, u_2, u_3 على الترتيب .

حيث ∇u_1 متجه عنـــد P عمودى على السطح $u_1 = c_1$ فإن وحدة المتجه فى هـــذا الاتجاه تعطى . بالصيغة $\mathbf{E}_1 = \nabla u_1 / |\nabla u_1|$. بالمثل وحدة المتجهات $\mathbf{E}_2 = \nabla u_2 / |\nabla u_2|$ and $\mathbf{E}_3 = \nabla u_3 / |\nabla u_3|$ at P تكون عمودية على السطوح $u_2 = c_2$ و $u_3 = c_3$ على الترتيب .



(شكل ٧ — ٢)

لذلك عند كل نقطة P لنظام منحنى الأضلاع يوجد عموماً فئتان من وحدة المتجهات $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ تكون مماسة لإحداثى المنحنيات ويكون $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ عمودية على أحداثيات السطوح (شكل ٧ — ٢) . تصبح الفئات مماثلة إذا كان فقط نظام إحداثيات منحنى الأضلاع متعامداً (أنظر مسألة ١٩) . كلتا الفئتين تشابه وحدة المتجهات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ فى الإحداثيات المتعامدة ولكن لاتشابهها فى أنها قد تغير الاتجاهات من نقطة إلى أخرى . يمكن تبيان (أنظر مسألة ١٥) أن الفئات $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ و $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ تكون نظم متجهات متعاكسة .

المتجه $\mathbf{A}$ يمكن أن يمثل بدلالة وحدة المتجهات الأساسية $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ أو $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ فى الصيغة .

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = a_1 \mathbf{E}_1 + a_2 \mathbf{E}_2 + a_3 \mathbf{E}_3$$

حيث A_1 ، A_2 ، A_3 وكذلك a_1 ، a_2 ، a_3 هى بالترتيب مركبات $\mathbf{A}$ فى كل نظام .

أيضاً يمكننا أن نمثل المتجه $\mathbf{A}$ بدلالة المتجهات الاساسية $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ أو $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ والتى تسمى متجهات الوحدة الأساسية ولكن على العموم ليست هى وحدة المتجهات . فى هذه الحالة .

$$\mathbf{A} = C_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} + C_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} + C_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = C_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + C_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + C_3 \boldsymbol{\alpha}_3$$

و

$$\mathbf{A} = c_1 \nabla u_1 + c_2 \nabla u_2 + c_3 \nabla u_3 = c_1 \boldsymbol{\beta}_1 + c_2 \boldsymbol{\beta}_2 + c_3 \boldsymbol{\beta}_3$$

حيث C_1, C_2, C_3 تسمى المركبات المضادة الاختلاف للمتجه $\mathbf{A}$ وتسمى c_1, c_2, c_3 المركبات المتحدة الاختلاف للمتجه $\mathbf{A}$ (أنظر مسائل ٣٣ و ٣٤) لاحظ أن $\boldsymbol{\alpha}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p}, \boldsymbol{\beta}_p = \nabla u_p , p = 1, 2, 3$

طول القوس وعناصر الحجم : من $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ لدينا

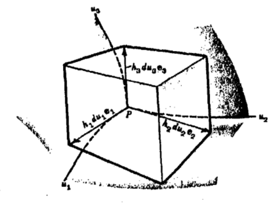
$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1\, du_1\, \mathbf{e}_1 + h_2\, du_2\, \mathbf{e}_2 + h_3\, du_3\, \mathbf{e}_3$$

إذن طول القوس التفاضلي ds يحدد من $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$
من النظم المتعامدة $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$

$$ds^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2$$

النظم غير المتعامدة أو النظم العامة لمنحنى الأضلاع . (أنظر مسألة ١٧) .

على طول المنحنى u_1 وإذا كانت u_3 وu_2 ثوابت بحيث $d\mathbf{r} = h_1\, du_1\, \mathbf{e}_1$ إذن طول القوس التفاضلي ds_1 على طول u_1 عند P تكون $h_1\, du_1$. بالمثل أطوال الأقواس التفاضلية على طول u_2 و u_3 عند النقطة P يكون $ds_2 = h_2 du_2,\ ds_3 = h_3 du_3$.



شكل ٧ — ٣

بالرجوع إلى (شكل ٧ — ٣) يكون عنصر الحجم لنظام أحداثيات منحنى الأضلاع المتعامد يعطى المعادلة .

$$dV = |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \cdot (h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$$

حيث $|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3| = 1$

الانحدار ، التباعد والالتفاف : يمكن التعبير عنه بدلالة إحداثيات منحنى الأضلاع . إذا كانت Φ دالة عددية و $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ دالة متجه لإحداثيات منحنى الأضلاع المتعامد u_1, u_2, u_3 إذن النتائج الآتية صالحة

$$\nabla \Phi = \text{grad}\ \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 \qquad \text{— ١}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div}\ \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3) \right] \qquad \text{— ٢}$$

$$\nabla^2 \Phi = \text{Laplacian of}\ \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right) \right] \qquad \text{— ٣}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{curl}\ \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \qquad \text{— ٤}$$

إذ e_1, e_2, e_3 و $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ بدلت الكميات i, j, k فإن هذه تئول إلى التعبير العادى فى الاحداثيات العمودية حيث (u_1, u_2, u_3) تحل محل (x, y, z)

إمتداد النتائج السابقة يمكن الوصول إليها بالنظرية الأكثر عموماً لنظم منحنى الأضلاع باستخدام طرق تحليل الكميات الممتدة التى سوف تؤخذ فى الإعتبار فى الباب (٨)

نظم الاحداثيات الخاصة المتعامدة :

(١) الاحداثيات الاسطوانية : (ρ, ϕ, z) (أنظر شكل ٧ - ٤)

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

حيث $\rho \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

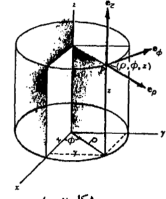
$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1$$

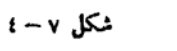
(٢) الاحداثيات الكروية : (r, θ, ϕ) (أنظر شكل ٧ - ٥)

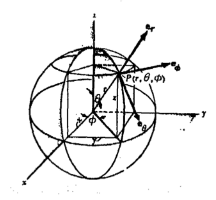
$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

حيث $r \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta$$




شكل ٧ - ٤



شكل ٧ - ٥

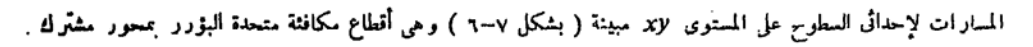
(٣) الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافىء : (u, v, z) (أنظر شكل ٧ - ٦)

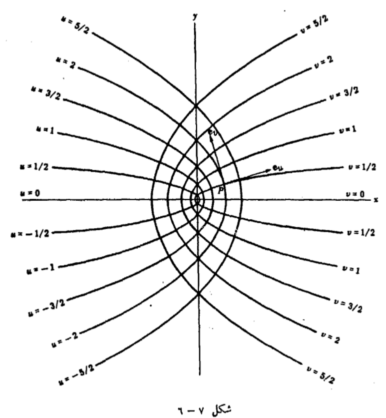
$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

حيث $-\infty < u < \infty, \quad v \geqq 0, \quad -\infty < z < \infty$

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1$$

فى الإحداثيات الاسطوانية $u = \sqrt{2\rho} \cos \dfrac{\phi}{2}, \quad v = \sqrt{2\rho} \sin \dfrac{\phi}{2}, \quad z = z$


المسارات لإحداثى السطوح على المستوى xy مبينة (بشكل ٧–٦) وهى أقطاع مكافئة متحدة البؤرر بمحور مشترك .



شكل ٧ – ٦

٤ – احداثيات جسم قطع مكافىء : (u, v, ϕ)

$$x = uv\cos\phi, \quad y = uv\sin\phi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

حيث $\quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv$$

فئتان من إحداثى السطوح يمكن الحصول عليهما بدوران القطع المكافىء (شكل ٧ – ٦) حول محور x الذى يعاد ترقيمه بمحور z . الفئة الثالثة من إحداثى السطوح هى مستويات تمر خلال هذا المحور .

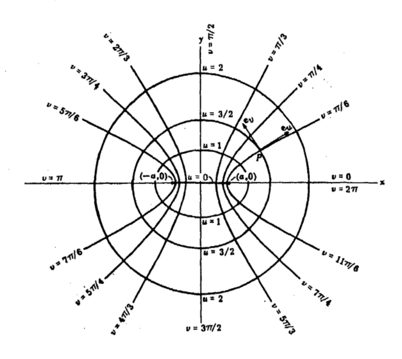
٥ – الاحداثيات الاسطوانية لقطع ناقص : (u, v, z) (أنظر شكل ٧ – ٧)

$$x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\sinh u\sin v, \quad z = z$$

حيث $\quad u \geqq 0, \quad 0 \leqq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

$$h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad h_z = 1$$

المسارات لإحداثى السطوح على المستوى xy مبينة فى (شكل ٧ – ٧) وهى تكون قطعاً ناقصاً وزائداً متحد البؤرة .



شكل ٧ – ٧

٦ – احداثيات شبه الكرة المتطاول : (ξ, η, ϕ)

$$x = a\sinh\xi\,\sin\eta\,\cos\phi, \quad y = a\sinh\xi\,\sin\eta\,\sin\phi, \quad z = a\cosh\xi\,\cos\eta$$

حيث $\xi \geqq 0, \quad 0 \leqq \eta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_\phi = a\sinh\xi\,\sin\eta$$

فئتان من إحداثى السطوح يمكن الحصول عليهما بدوران المنحنيات التى فى (شكل ٧ – ٧) حول محور x والذى سيسمى محور z . المجموعة الثالثة من إحداثى السطوح تكون مستويات تمر خلال هذا المحور .

٧ – احداثيات شبه الكرة المفلطحة : (ξ, η, ϕ)

$$x = a\cosh\xi\,\cos\eta\,\cos\phi, \quad y = a\cosh\xi\,\cos\eta\,\sin\phi, \quad z = a\sinh\xi\,\sin\eta$$

حيث $\xi \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_\phi = a\cosh\xi\,\cos\eta$$

فئتان من إحداثيات السطوح يمكن الحصول عليهما بإدارة المنحنيات فى (شكل ٧ – ٧) حول المحور y الذى أعيد ترقيمه بمحور z . المجموعة الثالثة لإحداثيات السطوح تكون مستويات تمر خلال هذه المحاور

٨ - احداثيــات القطع الناقص : (γ, μ, ν)

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1, \qquad \lambda<c^2<b^2<a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1, \qquad c^2<\mu<b^2<a^2$$

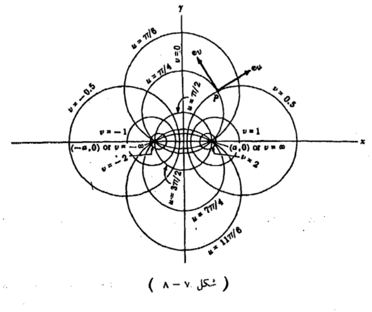
$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1, \qquad c^2<b^2<\nu<a^2$$

$$h_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}}, \qquad h_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}$$

$$h_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}$$

٩ – الاحداثيات ثنائية القطب : (u, v, z) (أنظر شكل ٧ – ٨)

$$x^2+(y-a\cot u)^2=a^2\csc^2 u, \qquad (x-a\coth v)^2+y^2=a^2\operatorname{csch}^2 v, \qquad z=z$$



(شكل ٧ – ٨)

$$x=\frac{a\sinh v}{\cosh v-\cos u}, \qquad y=\frac{a\sin u}{\cosh v-\cos u}, \qquad z=z$$

أو

$$0\leq u<2\pi, \quad -\infty<v<\infty, \quad -\infty<z<\infty \qquad \text{حيث}$$

$$h_u=h_v=\frac{a}{\cosh v-\cos u}, \quad h_z=1$$

لرسم إحداثيات السطوح على المستوى xy مبينة فى (شكل ٧ – ٨) بإدارة المنحنيات التى فى (شكل ٧ –٨) حول محور y وإ عادة تسمية المحور بمحور z تكون قد حصلنا على نظام الإحداثيات الحلقية ٠

مسائل محلولة

١ – اشرح إحداثى السطوح وإحداثى المنحنيات للآتى (أ) الاسطوانية و (ب) إحداثيات كروية .

(أ) إحداثى السطوح (أو مستوى السطوح) تكون

$\rho = c_1$ اسطوانات متحدة المحور مع محور z (أو محور z إذا كان $c_1 = 0$) .

$\phi = c_2$ مستويات خلال محور z .

$z = c_3$ مستويات عمودية على محور z .

تكون إحداثى المنحنيات هى :

تقاطع $\rho = c_1$ و $\phi = c_2$ (منحنى z) هو خط مستقيم .

تقاطع $\rho = c_1$ و $z = c_3$ (منحنى) هو دائرة أو نقطة .

تقاطع $\phi = c_2$ و $z = c_3$ (منحنى ρ) هو خط مستقيم

(ب) إحداثى السطوح تكون

$r = c_1$ كرات مركزها عند الأصل (أو الأصل إذا كان) $c_1 = 0$.

$\theta = c_2$ مخروطات رأسها عند الأصل (خطوط إذا كان $c_2 = 0$ أو π والمستوى xy إذا كان $(c_2 = \pi/2$.

$\phi = c_3$ مستويات خلال محور z

إحداثى المنحنيات تكون :

تقاطع $r = c_1$ و $\theta = c_2$ (منحنى ϕ) هى دائرة (أو نقطة) .

تقاطع $r = c_1$ و $\phi = c_3$ (منحنى θ) هى نصف دائرة $(c_1 \neq 0)$.

تقاطع $\theta = c_3$ و $\phi = c_3$ (منحنى r) هو خط مستقيم

٢ – عين التحول من إحداثيات اسطوانية إلى إحداثيات عمودية

المعادلات التى تعرف التحول من إحداثيات عمودية إلى إحداثيات اسطوانية هى

$$x = \rho \cos\phi \quad (1), \quad y = \rho \sin\phi \quad (2), \quad z = z \quad (3)$$

بتربيع (١) و (٢) والجمع $\rho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = x^2 + y^2$ أو

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, حيث $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ وتكون ρ موجبة .

بقسمة المعادلة (٢) على (١) $\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin\phi}{\rho \cos\phi} = \tan\phi$ أو $\phi = \text{arc tan}\,\frac{y}{x}$

حينئذ يكون التحول المطلوب $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, (٤) و $\phi = \text{arc tan}\,\frac{y}{x}$ (٥) $z = z$ (٦)

النقطة التى على محور z $(x = 0, y = 0)$ لاحظ أن ϕ غير محددة . مثل هذه النقط تسمى نقطاً فردية التحول

٣ – أثبت أن نظام الأحداثيات الاسطوانية يكون متعامداً متجه الموضع .

لأى نقطة فى الاحداثيات الاسطوانية هو

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\sin\phi\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

متجهات المماس للمنحنيات z , ϕ , ρ تعطى على الترتيب بـ $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ و $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ حيث

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

وحدة المتجهات فى هذا الاتجاه هى

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial\rho}{|\partial\mathbf{r}/\partial\rho|} = \frac{\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial\phi}{|\partial\mathbf{r}/\partial\phi|} = \frac{-\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}} = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial z}{|\partial\mathbf{r}/\partial z|} = \mathbf{k}$$

إذن

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\cdot(-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}) = 0$$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0$$

$$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = (-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0$$

وبالتالى $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3$ تكون أعمدة متبادلة ونظام الأحداثيات يكون متعامداً .

٤ – مثل المتجه $\mathbf{A} = z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ فى الاحداثيات الاسطوانية ثم أوجد $A\rho, A\phi$ و Az

من مسألة (٣)

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}\ (١) \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}\ (٢) \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}\ (٣)$$

بحل (١) و (٢) على التوالى

$$\mathbf{i} = \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi, \qquad \mathbf{j} = \sin\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$$

إذن

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}\\ &= z(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi) - 2\rho\cos\phi(\sin\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi) + \rho\sin\phi\,\mathbf{e}_z\\ &= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)\mathbf{e}_\rho - (z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi)\mathbf{e}_\phi + \rho\sin\phi\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

و

$$A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi, \quad A_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi, \quad A_z = \rho\sin\phi$$

٥ – أثبت $\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = \dot\phi\,\mathbf{e}_\phi,\ \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -\dot\phi\,\mathbf{e}_\rho$ حيث تبين النقط التفاضل بالنسبة للزمن t .

من مسألة (٣)

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j} \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

إذن

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = -(\sin\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{i} + (\cos\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{j} = (-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j})\dot{\phi} = \dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -(\cos\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{i} - (\sin\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{j} = -(\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\dot{\phi} = -\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho$$

٦ – عبر عن السرعة $\mathbf{v}$ والعجلة $\mathbf{a}$ لجسيم فى الإحداثيات الاسطوانية

فى الإحداثيات العمودية ، متجه الموضع يكون $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ومتجهات السرعة والعجلة تكون .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

فى الإحداثيات الاسطوانية ، استخدم مسألة (٤)

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (\rho\cos\phi)(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + (\rho\sin\phi)(\sin\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi) + z\,\mathbf{e}_z \\ &= \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

إذن

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\mathbf{e}_\rho + \rho\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z$$

باستخدام مسألة (٥) . فاضل مرة أخرى

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z) \\ &= \dot{\rho}\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \ddot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \rho\ddot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z \\ &= \dot{\rho}\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \ddot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}(-\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho) + \rho\ddot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

استخدم مسألة (٥)

٧ – أوجد مربع العنصر لطول المنحنى فى الإحداثيات الاسطوانية ثم اوجد معاملات المقياس المناظرة

الطريقة الاولى :

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

$$dx = -\rho\sin\phi\,d\phi + \cos\phi\,d\rho, \quad dy = \rho\cos\phi\,d\phi + \sin\phi\,d\rho, \quad dz = dz$$

إذن

$$\begin{aligned}ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (-\rho\sin\phi\,d\phi + \cos\phi\,d\rho)^2 + (\rho\cos\phi\,d\phi + \sin\phi\,d\rho)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\rho)^2 + h_2^2(d\phi)^2 + h_3^2(dz)^2\end{aligned}$$

و $h_1 = h_\rho = 1, \; h_2 = h_\phi = \rho, \; h_3 = h_z = 1.$

الطريقة الثانوية : متجه الموضع يكون $\mathbf{r} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\sin\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ إذن

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}dz$$

$$= (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\,d\rho + (-\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j})\,d\phi + \mathbf{k}\,dz$$

$$= (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)\,\mathbf{i} + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,dz$$

لذلك

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)^2 + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)^2 + (dz)^2$$

$$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2$$

٨ – حل مسألة (٧) لكل من (أ) الاحداثيات الكروية (ب) الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافىء

(أ) $x = r\sin\theta\cos\phi,\quad y = r\sin\theta\sin\phi,\quad z = r\cos\theta$

إذن

$$dx = -r\sin\theta\sin\phi\,d\phi + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta + \sin\theta\cos\phi\,dr$$

$$dy = r\sin\theta\cos\phi\,d\phi + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + \sin\theta\sin\phi\,dr$$

$$dz = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr$$

و

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2$$

معاملات المقياس هى $h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\theta = r,\ h_3 = h_\phi = r\sin\theta.$

(ب) $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),\quad y = uv,\quad z = z$

إذن $dx = u\,du - v\,dv,\quad dy = u\,dv + v\,du,\quad dz = dz$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (u^2+v^2)(du)^2 + (u^2+v^2)(dv)^2 + (dz)^2$$

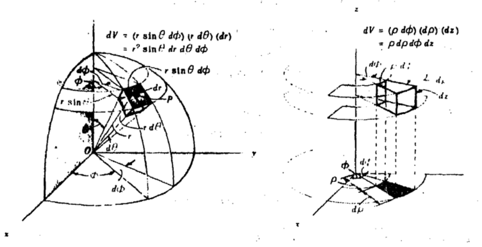
معاملات المقياس هى $h_1 = h_u = \sqrt{u^2+v^2},\ h_2 = h_v = \sqrt{u^2+v^2},\ h_3 = h_z = 1.$

٩ – إرسم عنصر الحجم فى (أ) الأحداثيات الاسطوانية (ب) الاحداثيات الكروية وأعطى مقادير أحرفه .

(أ) أحرف عنصر الحجم فى الأحداثيات الاسطوانية (شكل ٧ – ٩) (أ) له المقادير $d\rho, \rho d\phi$ وهذه يمكن رؤياها من حقيقة أن الأحرف تعطى بالمعادلات

$$ds_1 = h_1 du_1 = (1)(d\rho) = d\rho,\quad ds_2 = h_2 du_2 = \rho\,d\phi,\quad ds_3 = (1)(dz) = dz$$

باستخدام المعامل الذى حصلنا عليه فى المسألة (٧) .



شكل (ب) حجم العنصر فى الاحداثيات الكروية — شكل (أ) حجم العنصر فى الإحداثيات الاسطوانية

شكل ٧ – ٩

(ب) أحرف عنصر الحجم فى الإحداثيات الكروية (شكل ٧ – ٩) (ب) له المقادير $dr, r d\theta, r \sin\theta\, d\phi$. يمكن رؤية ذلك من حقيقة أن الأحرف تعطى بالمعادلات ·

$$ds_1 = h_1 du_1 = (1)(dr) = dr, \quad ds_2 = h_2 du_2 = r\, d\theta, \quad ds_3 = h_3 du_3 = r \sin\theta\, d\phi$$

باستخدام معاملات المقياس الذى حصلنا عليه فى المسألة (٨) (أ)

١٠– أوجد حجم العنصر dV فى (أ) الأحداثيات الاسطوانية (ب) الاحداثيات الكروية (جـ) الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافىء

حجم العنصر فى إحداثيات منحنى الأضلاع المتعامد u_1, u_2, u_3 هو .

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3$$

(أ) فى الاحداثيات الاسطوانية $u_1 = \rho,\ u_2 = \phi,\ u_3 = z,\ h_1 = 1,\ h_2 = \rho,\ h_3 = 1$ (أنظر مسألة ٧) إذن .

$$dV = (1)(\rho)(1)\, d\rho\, d\phi\, dz = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

هذه يمكن ملاحظتها مباشرة من شكل ٧ – ٩ (أ) المسألة (٩)

(ب) فى الاحداثيات الكروية $u_1 = r,\ u_2 = \theta,\ u_3 = \phi,\ h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$ (أنظر مسألة ٨ – أ) . إذن

$$dV = (1)(r)(r\sin\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

هذه يمكن ملاحظتها مباشرة من (شكل ٧ – ٩) (ب) لمسألة (٩)

(جـ) فى الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافىء $u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = z,\ h_1 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_2 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_3 = 1$ (أنظر مسألة (٨) (ب)) إذن .

$$dV = (\sqrt{u^2+v^2})(\sqrt{u^2+v^2})(1)\, du\, dv\, dz = (u^2+v^2)\, du\, dv\, dz$$

١١– أوجد (أ) معاملات المقياس و (ب) حجم العنصر dV فى الاحداثيات الكروية المفلطحة .

(أ) $x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi, \quad y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi, \quad z = a\sinh\xi\sin\eta$

$$dx = -a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi\,d\phi - a\cosh\xi\sin\eta\cos\phi\,d\eta + a\sinh\xi\cos\eta\cos\phi\,d\xi$$
$$dy = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi\,d\phi - a\cosh\xi\sin\eta\sin\phi\,d\eta + a\sinh\xi\cos\eta\sin\phi\,d\xi$$
$$dz = a\sinh\xi\cos\eta\,d\eta + a\cosh\xi\sin\eta\,d\xi$$

Then
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\xi)^2 + a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\eta)^2 + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\,(d\phi)^2$$

$$h_1 = h_\xi = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_2 = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_3 = h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta .$$

(ب)
$$dV = (a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta})(a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta})(a\cosh\xi\cos\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\phi$$
$$= a^3(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\cosh\xi\cos\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi$$

١٢– أوجد تعبيرات لعنصر المساحة فى إحداثيات منحنى الأضلاع المتعامد .

بالرجوع إلى (شكل ٧ – ٣) صفحة ١٧٨ ، تعطى عناصر المساحة بالعلاقة

$$dA_1 = |(h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2)\times(h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3)| = h_2h_3\,|\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3|\,du_2\,du_3 = h_2h_3\,du_2\,du_3$$

حيث $|\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_1| = 1.$ بالمثل

$$dA_2 = |(h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1)\times(h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3)| = h_1h_3\,du_1\,du_3$$

$$dA_3 = |(h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1)\times(h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2)| = h_1h_2\,du_1\,du_2$$

١٣– إذا كان u_1, u_2, u_3 إحداثيات منحنى الأضلاع المتعامد ، بين أن جاكوبيان لكل من x, y, z بالنسبة إلى u_1, u_2, u_3 يكون

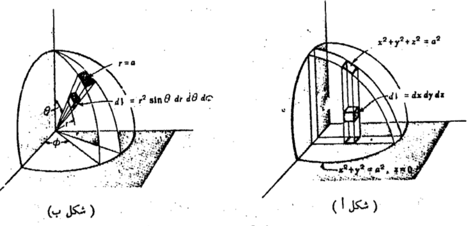
$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1h_2h_3$$

من مسألة (٣٨) للفصل (٢) . المحدد المعطى يساوى

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\mathbf{k}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_3}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = h_1\mathbf{e}_1\cdot h_2\mathbf{e}_2\times h_3\mathbf{e}_3$$
$$= h_1h_2h_3\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = h_1h_2h_3$$

إذا كان الجاكوبيان يساوى صفراً إذن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ تكون متجهات واقعة فى نفس المستوى ويكون تحول إحداثى منحنى الأضلاع بحيث تكون العلاقة بين x, y, z لها الصيغة $F(x, y, z) = 0$. حينئذ تتطلب أن تكون قيمة الجاكوبيان مختلفة عن الصفر .

١٤- احسب $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ حيث V هى الكرة التى مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها a .



(شكل ب)　　　　(شكل أ)

(شكل ٧ - ١٠)

التكامل المطلوب يساوى ثمانية أمثال التكامل المحسوب على جزء الكرة الموجود فى الثمن الأول أنظر شكل (٧ - ١٠) (أ) .

إذن فى احداثيات عمودية يكون التكامل تساوى

$$8 \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

ولكن الحساب ولو أنه ممكن إلا أنه شاق . من الأسهل استخدام الأحداثيات الكروية للحساب . للتغير إلى أحداثيات كروية ، التكاملية (المطلوب تكاملها) $x^2 + y^2 + z^2$ تبدل بالقيمة التى تكافئها r^2 بينما عنصر الحجم $dx\, dy\, dz$ يبدل بعنصر الحجم $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (أنظر مسألة ١٠) (ب) لتغطية المنطقة المطلوبة فى الثمن الأول ، ثبت كل من ϕ و θ أنظر شكل ١٠ (ب) وكامل من $r = 0$ إلى $r = a$ ثم احتفظ بقيمة ϕ ثابتة وكامل من $\theta = 0$ إلى $\pi/2$ ، أخيراً كامل بالنسبة إلى ϕ من $\phi = 0$ إلى $\phi = \pi/2$. هنا نكون قد أدينا التكامل فى الترتيب r, θ, ϕ مع العلم أن أى ترتيب يمكن استخدامه . وتكون النتيجة :

$$8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} (r^2)(r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi) = 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{r^5}{5} \sin\theta \Big|_{r=0}^{a} d\theta\, d\phi = \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} -\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} d\phi = \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi = \frac{4\pi a^5}{5}$$

فيزيائياً التكامل يمثل عزم القصور الذاتى للكرة بالنسبة إلى نقطة الأصل أى العزم القطبى للقصور الذاتى ، إذا كانت الكرة لها وحدة الكثافة .

عموماً ، عند تحول تكامل متعدد من الأحداثيات العمودية إلى منحنى الأضلاع المتعامدة فإن عنصر الحجم $dx\,dy\,dz$ يبدل بالمقدار $h_1h_2h_3\,du_1du_2du_3$ أو مايكافئها $J(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3})\,du_1du_2du_3$ حيث J هى الجاكوبيان للتحول من x, y, z إلى u_1, u_2, u_3 (أنظر مسألة ١٣)

١٥- إذا كان u_1, u_2, u_3 هى إحداثيات عامة ، بين أن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ و $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ تكون نظما اتجاهية متعاكسة .

لابد أن نبين أن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p}\cdot\nabla u_q = \begin{cases} 1 & \text{if } p = q \\ 0 & \text{if } p \neq q \end{cases}$ حيث p و q لها أحدى القيم $1, 2, 3$.

لدينا
$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3$$

بالضرب فى ∇u_1 . إذن

$$\nabla u_1\cdot d\mathbf{r} = du_1 = (\nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1})\,du_1 + (\nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2})\,du_2 + (\nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3})\,du_3$$

أو
$$\nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = 1,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = 0,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = 0$$

بالمثل ، بالضرب فى ∇u_3 و g_{pq} . يمكن أثبات العلاقات المتبقية

١٦- أثبت
$$\left\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right\}\left\{\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3\right\} = 1.$$

من مسألة ١٥ $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ و $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ تكون نظما اتجاهية متعاكسة . إذن النتيجة المطلوبة نحصل عليها من المسألة ٥٣ (جـ) فى الفصل ٢

تكون النتيجة معادلة لنظرية على الجاكوبيان الكية .

$$\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z})$$

وبالتالى $J(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z})\,J(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}) = 1$ باستخدام مسألة ١٣ .

١٧- بين أن مربع عنصر طول قوس فى احداثيات منحنى الأضلاع العامة يمكن التعبير عنها بواسطة المعادلة .

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\,du_p\,du_q$$

لدينا

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 du_3$$

إذن

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} &= \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1\, du_1^2 + \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2\, du_1 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3\, du_1 du_3 \\ &+ \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_1\, du_2 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_2\, du_2^2 + \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3\, du_2 du_3 \\ &+ \boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_1\, du_3 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_2\, du_3 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}_3\, du_3^2 \\ &= \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, du_p\, du_q \quad \text{where} \quad g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p\cdot\boldsymbol{\alpha}_q \end{aligned}$$

تسمى هذه الصيغة التربيعية الأساسية أو صيغة مترية . الكميات g_{pq} تسمى معاملات مترية وتكون متماثلة أى أن $g_{pq} = g_{qp}$ إذا كان $g_{pq} = 0$ وكذلك $p \neq q$ إذن نظام الاحداثيات يكون متعامداً . فى هذه الحالة $g_{11} = h_1^2,\ g_{22} = h_2^2,\ g_{33} = h_3$. الصيغة المترية يمكن أن تمتد إلى أبعاد فراغية أكبر تكون من المبادىء المهمة فى النظرية النسبية (أنظر فصل ٨) .

الانحدار ، التباعد والالتفاف فى الاحداثيات المتعامدة :

١٨ – اشتق تعبير الكمية $\nabla\Phi$ ، فى أحداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة .

ليكن $\nabla\Phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$ حيث f_1, f_2, f_3 مطلوب إيجادها .

حيث

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= h_1\mathbf{e}_1 du_1 + h_2\mathbf{e}_2 du_2 + h_3\mathbf{e}_3 du_3 \end{aligned}$$

لدينا

$$d\Phi = \nabla\Phi\cdot d\mathbf{r} = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 \quad (١)$$

لكن

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} du_3 \quad (٢)$$

بمساواة (١) و (٢)

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2},\quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

إذن

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

يبين هذا أن العامل يكافىء

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

يؤدى هذا إلى التعبير المعتاد للعامل ∇ فى الأحداثيات العمودية .

١٩ – ليكن u_1, u_2, u_3 أحداثيات متعامدة

(أ) أثبت أن $|\nabla u_p| = h_p^{-1},\ p = 1,2,3$

(ب) بين أن $\mathbf{e}_p = \mathbf{E}_p$

(أ) ليكن $u_1 = \Phi$ فى مسألة (١٨) . إذن $\nabla u_1 = \mathbf{e}_1/h_1$ كذلك ، $|\nabla u_1| = |\mathbf{e}_1|/h_1 = h_1^{-1}$ حيث $|\mathbf{e}_1| = 1$

بالمثل ليكن . $|\nabla u_3| = h_3^{-1}$ و $u_3 , |\nabla u_2| = h_2^{-1}$ ، $\Phi = u_2$

(ب) بالتعريف $\mathbf{E}_p = \dfrac{\nabla u_p}{|\nabla u_p|}$. من جزء (أ) وهذا يمكن أن يكتب فى الصيغة $\mathbf{E}_p = h_p \nabla u_p = \mathbf{e}_p$ وتكون النتيجة قد أثبتت

٢٠ – أثبت $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$ بمعادلات مماثلة لكل من $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ حيث u_1, u_2, u_3 إحداثيات متعامدة هو

من مسألة ١٩ $\nabla u_1 = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_1},\ \nabla u_2 = \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_2},\ \nabla u_3 = \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_3}.$

إذن $\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \dfrac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{h_2 h_3} = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}$ و $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 .$

بالمثل

$$\mathbf{e}_2 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2 .$$

٢١ – بين أن فى الأحداثيات المتعامدة يكون

$$\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) \qquad \text{(أ)}$$

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1) \qquad \text{(ب)}$$

بنتائج مماثلة للمتجهات $A_2 \mathbf{e}_2$ و $A_3 \mathbf{e}_3$.

(أ) من مسألة ٢٠

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \cdot (A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} + 0 = \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1) \\
&= \nabla (A_1 h_1) \times \nabla u_1 + A_1 h_1 \nabla \times \nabla u_1 \\
&= \nabla (A_1 h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + 0 \\
&= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_1) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) \right] \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \\
&= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)
\end{aligned}$$

٢٢ – عبر عن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ في الأحداثيات العمودية .

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla\cdot(A_1\mathbf{e}_1) + \nabla\cdot(A_2\mathbf{e}_2) + \nabla\cdot(A_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]$$

باستخدام مسألة ٢١ (أ)

٢٣ – عبر عن $\nabla \times \mathbf{A}$ في الأحداثيات العمودية

$$\nabla\times\mathbf{A} = \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1) + \nabla\times(A_2\mathbf{e}_2) + \nabla\times(A_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)$$

$$+ \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)$$

$$+ \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right]$$

$$+ \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]$$

باستخدام مسالة ٢١ (ب) . يمكن أن يكتب هذا

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix}$$

٢٤ – عبر عن $\nabla^2\psi$ في أحداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة من

$$\nabla\psi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3} \qquad \text{مسألة ١٨}$$

إذا كان $\mathbf{A} = \nabla\psi$ إذن $A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}$ ، $A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}$ ، $A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}$ من المسألة ٢٢

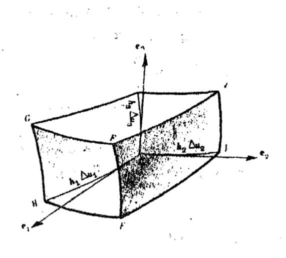
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

٢٥ – استخدم تعريف التكامل .

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\iint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

(أنظر مسألة ١٩ فصل ٦ .) التعبير عن $\nabla\cdot\mathbf{A}$ فى أحداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة .



شكل ٧ – ١١

اعتبر عنصر الحجم ΔV (أنظر الشكل ٧ – ١١ له الأضلاع $h_1\,\Delta u_1,\ h_2\,\Delta u_2,\ h_3\,\Delta u_3$.

ليكن $\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{e}_1 + A_2\,\mathbf{e}_2 + A_3\,\mathbf{e}_3$

و ليكن $\mathbf{n}$ وحدة العمود المتجه إلى الخارج للسطح ΔS للحجم ΔV . على الوجه $JKLP$ و $\mathbf{n} = -\,e_1$.

إذن يكون لدينا تقريباً

$$\iint_{JKLP}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\text{ at point }P)\,(\text{Area of }JKLP)$$

$$= [(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)\cdot(-\mathbf{e}_1)]\,(h_2h_3\,\Delta u_2\Delta u_3)$$

$$= -A_1\,h_2h_3\,\Delta u_2\Delta u_3$$

على وجه $EFGH$ يكون التكامل السطحى

$$A_1\,h_2h_3\,\Delta u_2\Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\,h_2h_3\,\Delta u_2\Delta u_3)\,\Delta u_1$$

بغض النظر عن الأجزاء متناهية الصغر ذات رتبة أعلى من $\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$. إذن الإسهام الصافى للتكامل السطحى لهذين السطحين يكون

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\,h_2h_3\,\Delta u_2\Delta u_3)\,\Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\,h_2h_3)\,\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$$

الأسهام لكل الستة وجوه للحجم ΔV يكون .

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\,h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2\,h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3\,h_1h_2)\right]\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$$

بقسمة هذه المعادلة على الحجم $h_1\,h_2\,h_3\,\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$ النهايات وأخذ النهايات عندما $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ تقترب من الصفر نجد .

نجد $$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\,h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2\,h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3\,h_1h_2)\right]$$

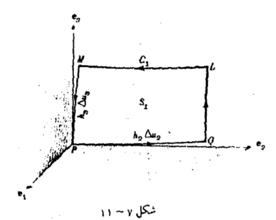
لاحظ أن نفس النتيجة يمكن الحصول عليها باختيار عنصر الحجم ΔV حيث أن P تكون فى المركز . فى هذه الحالة تكون الحسابات مماثلة لمسألة ٢١ فصل ٤

٢٦ – استخدم تعريف التكامل

$$(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

(أنظر مسألة ٣٥ فصل ٦) للتعبير عن $\nabla \times \mathbf{A}$ في أحداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة .

احسب أولا $(\text{curl}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_1$ لعمل هذا اعتبر السطح S العمودى على $\mathbf{e}_1$ عند P ، كما فى شكل ٧ – ١٢ عرف حدود S_1 بـ C_1 . ليكن $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ لدينا



شكل ٧ – ١١

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{PQ} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{QL} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{LM} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{MP} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

التقريبات الآتية صحيحة

$$\int_{PQ} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{A} \text{ at } P) \cdot (h_2 \Delta u_2 \mathbf{e}_2)$$

$$= (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \cdot (h_2 \Delta u_2 \mathbf{e}_2) = A_2 h_2 \Delta u_2 \qquad (١)$$

إذن

$$\int_{ML} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_2 h_2 \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2 \Delta u_2) \Delta u_3$$

أو

$$\int_{LM} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -A_2 h_2 \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2 \Delta u_2) \Delta u_3 \qquad (٢)$$

بالمثل

$$\int_{PM} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{A} \text{ at } P) \cdot (h_3 \Delta u_3 \mathbf{e}_3) = A_3 h_3 \Delta u_3$$

أو

$$\int_{MP} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -A_3 h_3 \Delta u_3 \qquad (٣)$$

و

$$\int_{QL} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_3 h_3 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3 \Delta u_3) \Delta u_2 \qquad (٤)$$

أجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) لديك

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3 \Delta u_3) \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2 \Delta u_2) \Delta u_3$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2) \right] \Delta u_2 \Delta u_3$$

بغض النظر عن الأجزاء متناهية الصغر لرتبة أعلى من $\Delta u_2 \Delta u_3$.

بالقسمة على المساحة S_1 التى تساوى $h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3$ وأخذ النهايات عندما Δu_2 و Δu_3 تقترب من الصفر

$$(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right]$$

بالمثل ، باختيار المساحات S_2 و S_3 عمودية على $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ على الترتيب عند P ، نجد $(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_2$ و $(\text{curl } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_3$ يؤدى هذا إلى النتيجة المطلوبة

$$\text{curl } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\right] + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

أيضاً يمكن الحصول على النتيجة باختيار P كركز للمساحة S_1 يمكن تكلمة الحساب كما فى مسألة ٣٦ فصل ٦ .

٢٧ – عبر عن الكمية الآتية فى الإحداثيات الأسطوانية (أ) $\nabla\Phi$ (ب) $\nabla\cdot\mathbf{A}$ (جـ) $\nabla\times\mathbf{A}$ (د) $\nabla^2\Phi$

فى الأحداثيات الأسطوانية (ρ, ϕ, z) .

$$u_1 = \rho,\ u_2 = \phi,\ u_3 = z;\quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z;$$

و

$$h_1 = h_\rho = 1,\quad h_2 = h_\phi = \rho,\quad h_3 = h_z = 1$$

(أ)

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

$$= \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

(ب)

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

$$= \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big((\rho)(1)A_\rho\Big) + \frac{\partial}{\partial\phi}\Big((1)(1)A_\phi\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big((1)(\rho)A_z\Big)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

حيث

$$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{e}_1 + A_\phi\mathbf{e}_2 + A_z\mathbf{e}_3,\ \text{i.e. } A_1 = A_\rho,\ A_2 = A_\phi,\ A_3 = A_z.$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \qquad (\text{ج})$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z\right]$$

(د)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

٢٨ – عبر عن (أ) $\nabla\times\mathbf{A}$ و (ب) $\nabla^2\psi$ في أحداثيات كروية

حيث $u_1=r,\ u_2=\theta,\ u_3=\phi;\ \mathbf{e}_1=\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_\phi;\ h_1=h_r=1,\ h_2=h_\theta=r,\ h_3=h_\phi=r\sin\theta$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix} \qquad (\text{أ})$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\right\}\mathbf{e}_r\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,A_\phi)\right\}r\mathbf{e}_\theta + \left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (\text{ب})$$

$$= \frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(r)(r\sin\theta)}{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{(r\sin\theta)(1)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

٢٩ – أكتب معادلة لابلاس فى الأحداثيات الأسطوانية لقطع مكافىء

من المسألة ٨ (ب) .

$$u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = z\ ;\quad h_1 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_2 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_3 = 1$$

إذن

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left((u^2+v^2)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

وتكون معادلة لابلاس $\nabla^2\psi = 0$ أو

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

٣٠ – عبر عن معادلة توصيل الحرارة $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\nabla^2 U$ فى الأحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص

حيث $u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = z\ ;\quad h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v},\ h_3 = 1$ إذن

$$\nabla^2 U = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

وتكون معادلة توصيل الحرارة هى

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left\{\frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\}$$

احداثيات منحنى الأضلاع السطحية :

٣١ – بين أن مربع عنصر طول القوس على السطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ يمكن أن تكتب فى الصيغة

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

لدينا

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dv$$

إذن

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}du\,dv + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dv^2$$

$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

٣٢ – بين أن عنصر مساحة السطح للسطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ تعطى بالمعادلة

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

تعطى معادلة العنصر بالمعادلة

$$dS = \left|\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}du\right)\times\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dv\right)\right| = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|du\,dv = \sqrt{\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)}\,du\,dv$$

الكمية التي تحت علامة الجزر تكون مساوية لـ (أنظر مسألة ٤٨ . فصل ٢)

$$EG - F^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)$$

بالتالي يمكن الحصول على النتيجة .

مسائل متنوعة على الاحداثيات العامة :

٣٣ – ليكن **A** متجهاً معرفاً بالنسبة إلى نظامين عامين من أحداثيات منحنى الأضلاع (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$. أوجد العلاقة بين المركبات المضادة الاختلاف للمتجه في نظامى الأحداثيات .

نفرض أن معادلات التحول من النظام المتعامد (x, y, z) إلى كل من (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ أعطيت النظم بواسطة :

$$\begin{cases} x = x_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = y_1(u_1, u_2, u_3), \quad z = z_1(u_1, u_2, u_3) \\ x = x_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad y = y_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad z = z_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \end{cases} \qquad (١)$$

إذن يوجد تحول مباشر من نظام (u_1, u_2, u_3) إلى نظام $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ معرفة بواسطة

$$u_1 = u_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad u_2 = u_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad u_3 = u_3(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \qquad (٢)$$

وعكسياً من (١)

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 du_3$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 d\bar{u}_3$$

إذن

$$\boldsymbol{\alpha}_1 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 du_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 d\bar{u}_3 \qquad (٣)$$

من (٢)

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

بالتعويض في (٣) ومساواة المعاملات $d\bar{u}_1, d\bar{u}_2, d\bar{u}_3$ في كلا الجانبين ، نجد

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases} \qquad (٤)$$

الآن A يمكن التعبير عنها فى نظامى الأحداثيات كالآتى

$$A = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 \quad و \quad A = \bar{C}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{C}_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \bar{C}_3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 \qquad (٥)$$

حيث C_1, C_2, C_3 و $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ هى الصور المضادة الاختلاف لمركبات A فى نظامى الأحداثيات. بالتعويض من (٤) فى (٥)

$$C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \bar{C}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{C}_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \bar{C}_3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$$

$$= (\bar{C}_1\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_1 + (\bar{C}_1\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_2 + (\bar{C}_1\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_3$$

إذن

$$\begin{cases} C_1 = \bar{C}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \\ C_2 = \bar{C}_1\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \\ C_3 = \bar{C}_1\dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases} \qquad (٦)$$

أو بالرموز القصيرة

$$C_p = \bar{C}_1\frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_3} \qquad p = 1,2,3 \qquad (٧)$$

وبالرموز الزوجية الأقصر

$$C_p = \sum_{q=1}^{3} \bar{C}_q \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_q} \qquad p = 1,2,3 \qquad (٨)$$

بالمثل ، بتغيير الأحداثيات نجد أن

$$\bar{C}_p = \sum_{q=1}^{3} C_q \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q} \qquad p = 1,2,3 \qquad (٩)$$

النتائج السابقة تقودنا لتبنى التعريف الآتى . إذا كانت ثلاث كيات C_1, C_2, C_3 لنظام الأحداثيات (u_1, u_2, u_3) لها علاقة بثلاث كيات أخرى $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ لنظام أحداثيات أخرى $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ باستخدام معادلات التحول (٦) ، (٧) ، (٨) أو (٩) . إذن تسمى هذه الكيات الصور المضاده الاختلاف لمركبات المتجه أو الصور مضادة الاختلاف للكيات الممتدة للصف الأول .

٣٤ – أجد حل مسألة ٣٣ لمركبات المتجه A المتحدة الاختلاف .

أكتب المركبات المتحدة الاختلاف للمتجه A فى النظم (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ مثل c_1, c_2, c_3 و $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ على الترتيب . إذن

$$A = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \bar{c}_1\nabla\bar{u}_1 + \bar{c}_2\nabla\bar{u}_2 + \bar{c}_3\nabla\bar{u}_3 \qquad (1)$$

حيث الآن $\bar{u}_p = \bar{u}_p(u_1, u_2, u_3)$ with $p = 1,2,3$.

$$(٢)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial y} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial z} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{cases} \quad p = 1,2,3$$

أيضاً

$$(٣)\quad c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$(٤)\quad \bar{c}_1\nabla \bar{u}_1 + \bar{c}_2\nabla \bar{u}_2 + \bar{c}_3\nabla \bar{u}_3 = \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

ساوى معاملات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ فى (٣) و (٤) .

$$(٥)\quad \begin{cases} c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial y} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial z} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \end{cases}$$

عوض فى المعادلات (٢) لقيم $p = 1, 2, 3$ فى أى من المعادلات (٥) وساوى المعاملات $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_3}{\partial z}$ على كل جانب نجد

$$(٦)\quad \begin{cases} c_1 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1} \\ c_2 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2} \\ c_3 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3} \end{cases}$$

التى يمكن أن تكتب

$$(٧)\quad c_p = \bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_p} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_p} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_p} \qquad p = 1,2,3$$

أو

$$(٨)\quad c_p = \sum_{q=1}^{3} \bar{c}_q\frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_p} \qquad p = 1,2,3$$

بالمثل يمكن أن نرى :

$$\bar{c}_p = \sum_{q=1}^{3} c_q \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p} \qquad p = 1,2,3 \qquad (٩)$$

النتيجة السابقة تقودنا لتبنى التعريف الآتى . إذا ثلاث كيات c_1, c_2, c_3 لنظام أحداثى (u_1, u_2, u_3) لها علاقة بثلاث كيات أخرى c_1, c_2, c_3 لنظام احداثيات أخرى (u_1, u_2, u_3) باستخدام معادلات التحول (٦) ، (٧)، (٨) أو (٩) ، إذن تسمى الكميات مركبات المتجه المتحدة الاختلاف أو الكميات الممتدة الاختلاف للصف الأول .

بتعميم هذا فإن المبدأ فى هذه المسألة وكذلك فى المسألة (٣٣) لفراغات ذات أبعاد أعلى ، وبتعميم مبدأ المتجه لوصلنا لتحليل الكميات الممتدة التى سوف نتعرض لها فى الفصل الثامن . فى عملية التعميم يكون من المناسب أن نستعمل علامات مختصرة لكى نعبر عن الأفكار الأساسية فى صيغة موجزة . لابد أن نتذكر أنه مهما كانت الرموز المستخدمة فإن الأفكار الأساسية المعالجة فى الفصل الثامن تكون مؤتلفة ومرتبطة مع تلك التى عولجت فى هذا الفصل .

٣٥ – (أ) أثبت أنه فى الأحداثيات العامة (u_1, u_2, u_3) .

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)^2$$

حيث g_{pq} تكون معاملات $du_p\, du_q$ فى ds^2 (مسألة ١٧) .

(ب) بين أن حجم العنصر فى الأحداثيات العامة تكون $\sqrt{g}\; du_1\, du_2\, du_3$

(أ) من مسألة (١٧)

$$(١) \quad g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_q} = \frac{\partial x}{\partial u_p}\frac{\partial x}{\partial u_q} + \frac{\partial y}{\partial u_p}\frac{\partial y}{\partial u_q} + \frac{\partial z}{\partial u_p}\frac{\partial z}{\partial u_q} \qquad p, q = 1,2,3$$

إذن باستخدام النظرية الآتية على ضرب المحددات .

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 & a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 & a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 & b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 & c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

لدينا

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)^2 \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(ب) حجم العنصر يعطى بالمعادلة :

$$dV = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3\right) \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1\, du_2\, du_3$$

$$= \sqrt{g}\; du_1\, du_2\, du_3$$

لاحظ أن $\sqrt{g}$ هى قيمة مطلقة لجاكوبيان x, y, z بالنسبة إلى u_1, u_2, u_3 (أنظر مسألة ١٢) .

مسائل متنوعة

الأجابة على هذه المسائل المتنوعة معطاة فى أخر هذا الفصل

٣٦ – اشرح وارسم احداثى السطوح واحداثى المنحنيات لكل من :

(أ) الأسطوانة لقطع ناقص (ب) القطبية (جـ) الأحداثيات الأسطوانية لقطع مكافىء .

٣٧ – أوجد صيغ التحول (أ) احداثيات كروية إلى احداثيات متعامدة (ب) احداثيات كروية إلى احداثيات أسطوانية .

٣٨ – عبر فى الإحداثيات الكروية عن كل من المحال الهندسية الآتية :

(أ) الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (جـ) الجسم المكافئ $z = x^2 + y^2$

(ب) المخروط $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ (د) المستوى $z = 0$ (هـ) المستوى $y = x$

٣٩ – إذ كان ρ, ϕ, z احداثيات اسطوانية ، اشرح كل المحال الهندسية واكتب معادلة كل محل هندسى فى الاحداثيات المتعامدة (أ) $\rho = 4, z = 0$ (ب) $\rho = 4$ ، (جـ) $\phi = \pi/2$ (د) $\phi = \pi/3, z = 1$

٤٠ – إذا كان u, v, z احداثيات أسطوانية لقطع ناقص حيث $a = 4$ اشرح كل المحال الهندسية واكتب معادلة كل محل هندسى فى الأحداثيات المتعامدة .

(أ) $v = \pi/4$; (ب) $u = 0, z = 0$ (جـ) $u = \ln 2, z = 2$ (د) $v = 0, z = 0$

٤١ – إذا كان u, v, z احداثيات أسطوانية لقطع مكافئ ، ارسم المنحنيات أو المناطق المبينة بالمعادلات الآتية :

(أ) $u = 2, z = 0$ (ب) $v = 1, z = 2$ (جـ) $1 \leqq u \leqq 2, 2 \leqq v \leqq 3, z = 0$ (د) $1 < u < 2, 2 < v < 3, z = 0$

٤٢ – (أ) أوجد وحدة المتجهات $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ لنظام الأحداثيات الكروية بدلالة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

(ب) حل لكل من $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بدلالة $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$

٤٣ – مثل المتجه $\mathbf{A} = 2y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ فى الأحداثيات الكروية ثم أوجد أوجد : A_r, A_θ و A_ϕ

٤٤ – أثبت أن نظام الأحداثيات الكروية يكون متعامداً .

٤٥ – أثبت أن الأحداثيات الآتية تكون متعامدة : (أ) الأسطوانية لقطع مكافئ . (ب) الأسطوانية لقطع ناقص .
(ج) الكروية المفلطحة .

٤٦ – أثبت $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\theta\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_r - \cos\theta\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\theta$

٤٧ – عبر عن السرعة $\mathbf{v}$ والعجلة $\mathbf{a}$ لجسم فى الأحداثيات الكروية

٤٨ – أوجد مربع عنصر طول قوس ومعاملات المقياس المناظرة فى : (أ) احداثيات الجسم لقطع مكافئ .
(ب) الأحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص . و(ج) الأحداثيات الكروية المفلطحة .

٤٩ – أوجد حجم العنصر dV فى (أ) الجسم لقطع مكافئ . (ب) الأسطوانية لقطع ناقص و (ج) الأحداثيات القطبية .

٥٠ – أوجد (أ) معاملات المقياس و (ب) حجم العنصر dV فى احداثيات شبه الكرة المتطاولة .

٥١ – استنتج تعبير المعاملات المقياس فى (أ) الأحداثيات لقطع ناقص (ب) الأحداثيات القطبية .

٥٢ – أوجد عناصر المساحة لعنصر الحجم فى الأحداثيات : (أ) الأسطوانية . (ب) الكروية . (ج) لجسم قطع مكافئ .

٥٣ – أثبت أن الشرط اللازم والكافى لأن تكون أحداثيات منحنى الأضلاع متعامدة هو $g_{pq} = 0$ لقيمة $p \neq q$.

٥٤ – أوجد الجاكوبيان $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$ للأحداثيات الآتية : (أ) أسطوانية (ب) كروية (ج) الأسطوانية لقطع مكافئ
(د) الأسطوانية لقطع ناقص (هـ) شبه الكرة المتطاولة .

٥٥ – أحسب $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ حيث V المنطقة المحددة بواسطة $z = 8-(x^2+y^2)$ و $z = x^2+y^2$
ملحوظة : استخدم الأحداثيات الأسطوانية :

٥٦ – أوجد الحجم الأصغر للمنطقتين المحددتين بواسطة الكرة $x^2+y^2+z^2 = 16$ والمخروط $z^2 = x^2+y^2$.

٥٧ – استخدم الأحداثيات الكروية لايجاد الحجم الأصغر المنطقتين المحددتين بواسطة كرة نصف قطره a والمستوى الذى يقطع الكرة عند مسافة h من مركزها .

٥٨ – (أ) اشرح احداثى السطوح واحداثى المنحنيات للنظام .

$$x^2 - y^2 = 2u_1 \cos u_2, \quad xy = u_1 \sin u_2, \quad z = u_3$$

(ب) بين أن النظام يكون متعامداً (ج) أوجد : $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$ لهذا النظام (د) بين أن u_1 و u_2 لها علاقة بالأحداثيات الأسطونية ρ و ϕ وأوجد هذه العلاقة .

٥٩ – أوجد عزم القصور الذاتى للمنطقة المحددة بالمعادلة: $x^2 - y^2 = 2,\ x^2 - y^2 = 4,\ xy = 1,\ xy = 2,\ z = 1$ و $z = 3$
بالنسبة إلى محور z إذا كانت الكثافة ثابتة وتساوى κ ملحوظة : ليكن $x^2 - y^2 = 2u,\ xy = v$

٦٠ – أوجد $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ ، $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ فى الأحداثيات (أ) الأسطوانية (ب) الكروية (ج) الأسطوانية لقطع مكافئ بين أن : $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2,\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$ لهذه النظم .

٦١ – أعطيت تحول الأحداثى : $u_1 = xy,\ 2u_2 = x^2+y^2,\ u_3 = z$ (أ) بين أن نظام الأحداثى لا يكون متعامداً
(ب) أوجد : $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$ (ج) أوجد ds^2

٦٢ – أوجد $\text{div}\,\mathbf{A}$ ، $\nabla\Phi$ وكذلك $\text{curl}\,\mathbf{A}$ فى الأحداثيات الأسطوانية لقطع مكافئ .

٦٣ – عبر عن (أ) $\nabla^2\psi$ و (ب) $\nabla\cdot\mathbf{A}$ فى الإحداثيات الكروية .

٦٤ – أوجد $\Delta^2\psi$ فى الأحداثيات الكرونة المفلطحة .

٦٥ – أكتب المعادلة : $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \Phi$ فى الأحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص .

٦٦ – عبر عن معادلة ماكسويل : $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$ فى الأحداثيات شبه الكرة المتطاولة .

٦٧ – عبر عن معادلة شرويدنجرر لميكانيكا الكم $\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V(x,y,z))\psi = 0$ فى الأحداثيات الأسطوانية لقطع مكافئ حيث m, h E ثوابت .

٦٨ – أكتب معادلة لابلاس فى احداثيات القطع المكافئ .

٦٩ – عبر عن معادلة الحرارة $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\nabla^2 U$ فى الأحداثيات الكروية إذا كانت U غير معتمدة على (أ) ϕ, و (ب) θ وϕ (جـ) t و r (د) t و ϕ, θ .

٧٠ – أوجد عنصر طول قوس على الكرة التى نصف قطرها a .

٧١ – أثبت أنه فى أى نظام احداثيات منحنى الأضلاع المتعامدة يكون $\text{div}\,\text{curl}\,\mathbf{A} = 0$ و $\text{curl}\,\text{grad}\,\Phi = 0$.

٧٢ – أثبت أن مساحة السطح لمنطقة معطاة R لسطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ هو $\iint_R \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ استخدم هذا لايجاد مساحة سطح الكرة .

٧٣ – أثبت أن المتجه الذى طوله p وعمودى فى كل مكان على السطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ يعطى بالعلاقة :

$$\mathbf{A} = \pm\, p\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\Big/\sqrt{EG - F^2}$$

٧٤ – (أ) اشرح مستوى التحول $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

(ب) تحت أى الشروط تكون الأحداثيات الخطية u, v متعامدة ؟

٧٥ – ليكن (x, y) احداثيات النقطة P فى المستوى المتعامد xy وتكون (u, v) احداثيات النقطة Q فى المستوى المتعامد uv إذا كان $y = y(u, v)$ ، $x = x(u, v)$ يقال أنه يوجد تناظر بين النقطة P والنقطة Q

(أ) إذا كان $x = 2u + v$ و $y = u - 2v$ بين أن الخطوط فى المستوى xy تناظر الخطوط فى المستوى uv

(ب) ما هو المربع المحدد بواسطة $x = 0, x = 5, y = 0$ $y = 5$ المناظر للمستوى uv

(جـ) احسب الجاكوبيان $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ وبين أن هذه لها علاقة بنسبة المساحات للمربع وصورته فى المستوى uv

٧٦ – إذا كان $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$ أوجد الصورة (أو الصور) فى المستوى uv للمربع المحدد بواسطة $x = 0$ $x = 1$ $x =$ و $= 0, y = 1$ فى المستوى xy

٧٧ – بين أنه تحت الشروط المناسبة على F و G أن

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)}\, F(x)\, G(y)\, dx\, dy = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\right\} dt$$

ملحوظة : استخدم التحول $x = v$ و $x + y = t$ من المستوى xy إلى المستوى vt النتيجة تكون مهمة فى نظريات تحول لابلاس .

٧٨ – (أ) إذا كان $x = 3u_1 + u_2 - u_3,\ y = u_1 + 2u_2 + 2u_3,\ z = 2u_1 - u_2 - u_3$ أوجد حجم المكعب المحدد بواسطة $x = 0,\ x = 15,\ y = 0,\ y = 10,\ z = 0$ and $z = 5$ وصورة هذا المكعب فى نظام الأحداثيات المتعامدة $u_1 u_2 u_3$

(ب) أوجد علاقة نسبه هذه الحجوم إلى الجاكوبيان التحول .

٧٩ – ليكن (x, y, z) و (u_1, u_2, u_3) الأحداثيات المتعامدة واحداثيات منحنى الأضلاع على الترتيب لنقطة ما .

(أ) إذا كان $x = 3u_1 + u_2 - u_3,\ y = u_1 + 2u_2 + 2u_3,\ z = 2u_1 - u_2 - u_3$ ، هل النظام u_1, u_2, u_3 يكون متعامداً ؟

(ب) أوجد ds^2 و g للنظام .

(ج) ماهى العلاقة بين هذه المسألة والمسألة السابقة ؟

٨٠ – إذا كان $x = u_1^2 + 2,\ y = u_1 + u_2,\ z = u_3^2 - u_1$ أوجد (أ) g (ب) الجاكوبيان $J = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ حقق أن $J^2 = g$

الاجابة على المسائل المتنوعة :

٣٦ – (أ) $u = c_1$ و $v = c_2$ يكونان أسطوانة لقطع ناقص وأسطوانة لقطع زائد على الترتيب ، لهما محور z مشترك $z = c_3$ تكون مستويات . أنظر شكل ٧ – ٧ صفحة ١٨٠ .

(ب) $u = c_1$ و $v = c_2$ تكون أسطوانات دائرية التى تقاطعها بالمستوى xy تكون دوائر مراكزها على محور y ومحور x على الترتيب وتتقاطع فى زاوية قائمة . الأسطوانات $u = c_1$ كلها تمر خلال النقط $(-a, 0, 0)$ و $(a, 0, 0)$ و $z = c_3$ تكون مستويات . أنظر شكل ٧ – ٨ صفحة ١٨٢ .

احداثى المنحنيات هى تقاطع أحداثى السطوح .

٣٧ – (أ) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\quad \phi = \arctan \dfrac{y}{x}$

(ب) $r = \sqrt{\rho^2+z^2},\quad \theta = \arctan \dfrac{\rho}{z},\quad \phi = \phi$ ،

٣٨ – (أ) $r = 3$ (ب) $\theta = \pi/6$ (ج) $r \sin^2\theta = \cos\theta$ (د) $\theta = \pi/2$

(هـ) المستوى $y = x$ متكون من نصفى المستويات $\phi = \pi/4$ $\phi = 5\pi/4$

٣٩ – (أ) دائرة $x^2 + y^2 + 16, z = 0$ فى المستوى xy (ب) أسطوانة $x^2+y^2=16$ التى محورها ينطبق على محور z (ج) المستوى yz حيث $y \geqq 0$ (د) الخط المستقيم $z = 1$ و $y = \sqrt{3}\,x$ حيث $y \geqq 0$ و $x \geqq 0$

٤٠ – (أ) أسطوانة لقطع زائد $x^2 - y^2 = 8$ (ب) خط يصل النقط $(-4, 0, 0)$ و $(4, 0, 0)$ أى أن $x = t, y = 0, z = 0$ حيث $-4 \leqq t \leqq 4$

(ج) قطع ناقص $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ z = 2$ (د) جزء من محور x معرف بـ $x \geqq 4,\ y = 0$

٤١ – (أ) قطع مكافئ $y^2 = 2x + 1, z = 2$ (ب) قطع مكافئ $y^2 = -8(x-2)$ و $z = 0$

(ج) منطقة فى المستوى xy محددة بالقطع المكافئة $y^2 = -2(x - 1/2),\ y^2 = -8(x-2),\ y^2 = 8(x+2)$ و $y^2 = 18(x+9/2)$ يحتوى الحدود . (د) مثل (ج) ماعدا الحدود .

٤٢ - (أ)

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

(ب)

$$\mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$$
$$\mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$$
$$\mathbf{k} = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$$

٤٣ - $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi$ حيث

$$A_r = 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - r\sin\theta\cos\theta\sin\phi + 3r\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$
$$A_\theta = 2r\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi - r\cos^2\theta\sin\phi - 3r\sin^2\theta\cos\phi$$
$$A_\phi = -2r\sin\theta\sin^2\phi - r\cos\theta\cos\phi$$

٤٧ - $v_r = \dot r,\ v_\theta = r\dot\theta,\ v_\phi = r\sin\theta\,\dot\phi$ ، $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$

$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi$ حيث $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\phi^2$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2,$$
$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot\phi)$$

٤٨ - (أ) $ds^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + u^2v^2\,d\phi^2,\quad h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2},\quad h_\phi = uv$

(ب) $ds^2 = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)(du^2+dv^2) + dz^2,\quad h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v},\quad h_z = 1$

(جـ) $ds^2 = a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\xi^2+d\eta^2) + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\,d\phi^2,$

$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta},\quad h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta$$

٤٩ - (أ) $uv(u^2+v^2)\,du\,dv\,d\phi$ (ب) $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)\,du\,dv\,dz$ (جـ) $\dfrac{a^2\,du\,dv\,dz}{(\cosh v - \cos u)^2}$

٥٠ - (أ) $h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta},\quad h_\phi = a\sinh\xi\sin\eta$

(ب) $a^3(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sinh\xi\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi$

٥٢ - (أ) $\rho\,d\rho\,d\phi,\quad \rho\,d\phi\,dz,\quad d\rho\,dz$

(ب) $r\sin\theta\,dr\,d\phi,\quad r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi,\quad r\,dr\,d\theta$

(جـ) $(u^2+v^2)\,du\,dv,\quad uv\sqrt{u^2+v^2}\,du\,d\phi,\quad uv\sqrt{u^2+v^2}\,dv\,d\phi$

٥٤ - (أ) ρ (ب) $r^2\sin\theta$ (جـ) u^2+v^2 (د) $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$ (هـ) $a^3(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sinh\xi\sin\eta$

٥٥ - $\dfrac{256\pi}{15}$ ٥٦ - $\dfrac{64\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ ٥٧ - $\dfrac{\pi}{3}(2a^3 - 3a^2h + h^3)$ ٥٨ - (جـ) (د) $u_1 = \frac{1}{2}\rho^2,\ u_2 = 2\phi$

٥٩ - 2κ

٦٠ - (أ)

$$\nabla\rho = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j},\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j},$$
$$\nabla\phi = \frac{-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{\rho},\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j},$$
$$\nabla z = \mathbf{k},\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k},$$

(ب)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + r\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - r\sin\theta\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i} + r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{j}$$

$$\nabla r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$$

$$\nabla\theta = \frac{xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - (x^2+y^2)\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}}{r}$$

$$\nabla\phi = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{r\sin\theta}$$

(ج)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -v\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

$$\nabla u = \frac{u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}}{u^2+v^2}, \quad \nabla v = \frac{-v\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j}}{u^2+v^2}, \quad \nabla z = \mathbf{k}$$

٦١- (ب)

$$ds^2 = \frac{(x^2+y^2)(du_1^2+du_2^2) - 4xy\,du_1du_2}{(x^2-y^2)^2} + du_3^2 = \frac{u_2(du_1^2+du_2^2) - 2u_1\,du_1du_2}{2(u_2^2-u_1^2)} + du_3^2$$

(ج) $\dfrac{1}{y^2-x^2}$

٦٢-

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\Bigg[&\left\{\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right)\right\}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{e}_u \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right\}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{e}_v \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right)\right\}\mathbf{e}_z\Bigg]\end{aligned}$$

٦٣- (أ)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

(ب)

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

٦٤-

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi = &\frac{1}{a^2\cosh\xi\,(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) \\ &+ \frac{1}{a^2\cos\eta\,(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\,\cos^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

٦٥-

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = a^2(\sinh^2u + \sin^2v)\Phi$$

٦٦-

$$\begin{aligned}&\frac{1}{aRS^2}\Bigg[\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(RE_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\eta)\right\}S\,\mathbf{e}_\xi \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(RE_\phi)\right\}S\,\mathbf{e}_\eta + \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(SE_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(SE_\xi)\right\}R\,\mathbf{e}_\phi\Bigg] \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_\xi}{\partial t}\mathbf{e}_\xi - \frac{1}{c}\frac{\partial H_\eta}{\partial t}\mathbf{e}_\eta - \frac{1}{c}\frac{\partial H_\phi}{\partial t}\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

حيث $S \equiv \sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}$ ، $R \equiv \sinh\xi \, \sin\eta$

٦٧ -

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\Big(E - W(u,v,z)\Big)\,\psi = 0,$$ حيث $W(u,v,z) = V(x,y,z)$

٦٨ - $$uv^2\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + u^2 v\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + (u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0$$

٦٩ - (أ) $$\frac{\partial U}{\partial t} = K\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]$$

(ب) $(d)\ \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dU}{dr}\right) = 0$ $\quad (c)\ \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial t} = K\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)\right]$

٧٠ - $$ds^2 = a^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right]$$

٧٤ - (ب) $$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

٧٨ - (أ) 750, 75 ، (ب) Jacobian = 10

٧٩ - (أ) No (ب) $$ds^2 = 14du_1^2 + 6du_2^2 + 6du_3^2 + 6du_1du_2 - 6du_1du_3 + 8du_2du_3, \quad g = 100$$

٨٠ - (أ) $g = 16u_1^2u_3^2$ (ب) $J = 4u_1u_3$

الفصل الثامن

تحليل الكمية الممتدة

قوانين فيزيائية : يجب أن لا تتوقف على نظام أحداثى خاص يستعمل فى شرحها الرياضى إذا أريد لها أن تكون صالحة .

الدراسة المترتبة على هذه المتطلبات تقودنا إلى تحليل الكمية الممتدة ، التى لها فائدة عظمى فى النظرية النسبية العامة ، علم الهندسة التفاضلية ، الميكانيكا ، المرونة ، الأيدروديناميكا ، النظرية الكهرومغناطيسية ومجالات أخرى متعددة فى العلوم والهندسة .

الفراغات ذات الابعاد النونية : فى الفراغ ذى الأبعاد الثلاثة تحدد النقطة مجموعة من ثلاثة أرقام ، تسمى أحداثيات ، تعين بتوصيف نظام أحداثيات خاص أو إطار للمقارنة . كمثال (x, y, z) ، (ρ, ϕ, z) ، (r, θ, ϕ) تكون أحداثيات نقطة فى النظام العمودى ، النظام الأسطوانى والنظام الكروى على الترتيب . نقطة فى الفراغ ذى الأبعاد النونية تكون ، بالتشابه مكونة من مجموعة أرقام N يرمز لها $(x^1, x^2, \ldots x^N)$ حيث $(1, 2, \ldots, N)$ أخذت ليست كأس ولكن كرمز علوى ، وهى سياسة سيثبت أهميتها .

الحقيقة لا يمكننا تصور نقط فى فراغ ذى أبعاد أكثر من ثلاثة أبعاد ليس لها بالطبع أى تأثير أو علاقة بوجود هذه النقط .

تحولات الاحداثى : ليكن $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ و $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ أحداثيات نقطة فى إطارى مقارنة مختلفين . نفترض وجود N من العلاقات المستقلة بين أحداثيات النظامين يكون لها الصيغ

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= \bar{x}^1(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\
\bar{x}^2 &= \bar{x}^2(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\
\vdots\ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \\
\bar{x}^N &= \bar{x}^N(x^1, x^2, \ldots, x^N)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

والتى يمكن أن نبينها باختصار كالآتى

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

حيث فرض أن للدوال المتضمنة قيما فردية ومستمرة ولها مشتقات مستمرة ، وبالعكس لكل فئة أحداثيات $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ تناظر فئة وحيدة $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ معطاة بالآتى

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

العلاقات (٢) أو (٣) تعرف تحول الأحداثيات من إطار مقارن إلى آخر .

اصطلاح التجميع : فى كتابة تعبير مثل $a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N$ يمكننا استعمال رمز قصير $\sum_{j=1}^{N} a_j x^j$. باستخدام رمز أكثر قصراً يمكننا ببساطة أن نكتبه $a_j x^j$ ، حيث نتخذ هذا الاصطلاح عندما يكون الأس (رمزاً سفلياً أو رمزاً علوياً) مكرراً فى حد معطى يمكننا أن نجمع على هذا الأس من 1 إلى N إذا ما لم يوصف غير هذا . يسمى هذا اصطلاح التجميع . بوضوح ، بدلا من استعمال الأس j يمكننا استعمال حرف آخر ، مثل p ، والجمع يمكن كتابته $a_p x^p$. أى أس يكرر فى حد معطى ، بحيث أنه يمكن تطبيق اصطلاح التجميع عليه ، يسمى الأس الدمية أو الأس المظلى .

الأس الذى يقع مرة واحدة فقط فى حد معطى يسمى أس حر ويمكن أن يكون لأى من الأعداد $1, 2, \ldots, N$ مثل K فى المعادلة (٢) أو (٣) كلا منهما يمثل N من المعادلات .

متجهات متضادة الاختلافات ومتحدة الاختلاف : إذا كانت N من الكيات $A^1, A^2, \ldots, A^N$ فى نظام أحداثى $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ مرتبطة بمقدار N من كيات أخرى $A_1, A_2, \ldots, A_N$ فى نظام أحداثى آخر $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ باستخدام معادلات التحول

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

التى باستخدام الاصطلاحات المتبناه يمكن ببساطة كتابتها كالآتى

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$$

وهى تسمى مركبات المتجه المتضادة الاختلاف أو الكية الممتدة المتضادة الاختلاف من المرتبة الأولى أو الرتبة الأولى . لنعطى الدافع لهذا ولتحولات أخرى ، أنظر مسائل ٣٣ و ٣٤ فصل ٧ .

إذا كانت N من الكيات $A_1, A_2, \ldots, A_N$ فى نظام أحداثى $x^1, x^2, \ldots x^N$ مرتبطة بمقدار N من كيات أخرى $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_N$ فى نظام أحداثى آخر $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ بواسطة معادلات التحول

$$\bar{A}_p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

أو

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$$

وهى تسمى مركبات المتجه المتحدة الاختلاف أو الكية الممتدة المتحدة الاختلاف من المرتبة الأولى أو الرتبة الأولى .

تذكر أن الرمز العلوى يستخدم لبيين المركبات المتضادة الاختلاف بينما الرمز السفلى يستخدم لبيين المركبات المتحدة الاختلاف ويحدث استثناء فى الرموز للأحداثيات .

بدلا من الحديث عن الكمية الممتدة التي مركباتها A^p أو A_p سنرجع دائماً ببساطة إلى الكمية الممتدة A^p أو A_p لا يجب أن يظهر التباس لذلك .

الكميات الممتدة المتضادة الاختلاف ، المتحدة الاختلاف والمختلطة : إذا كانت N^2 من الكميات A^{qs} في نظام أحداثي $(x^1, x^2, \ldots x^N)$

مرتبطة بالمقدار N^2 من كميات أخرى $\bar{A}^{pr}$ في نظام أحداثي آخر $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ باستخدام معادلات التحول

$$\bar{A}^{pr} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs} \qquad p, r = 1, 2, \ldots, N$$

أو

$$\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$$

بالإصلاحات المتبناة فهي تسمى المركبات المتضادة الاختلاف للكمية الممتدة من المرتبة الثانية أو فئة اثنين

N^2 من الكميات A_{qs} تسمى المركبات المتحدة الاختلاف للكمية الممتدة من المرتبة الثانية إذا كان

$$\bar{A}_{pr} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_{qs}$$

بالمثل N^2 من الكميات A^q_s تسمى مركبات مختلطة للكمية المتحدة الأختلاف من المرتبة الثانية إذا كان

$$\bar{A}^p_r = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A^q_s$$

الكرونكر دلتا : تكتب δ^j_k، تكون معرفة كالآتي ،

$$\delta^j_k = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } j \neq k \\ 1 & \text{إذا كان } j = k \end{cases}$$

وكما يبين رمزها ، فإنها كية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية .

كميات ممتدة من رتبة أكبر من اثنين : تعرف بسهولة . كمثال A^{qst}_{kl} هي المركبات المختلطة الكمية الممتدة من المرتبة ٥ ، متضادة الاختلاف من المرتبة ٣ ومتحدة الاختلاف من الرتبة ٢ ،

إذا حولوا تبعاً للعلاقة

$$\bar{A}^{prm}_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^{qst}_{kl}$$

الكميات العددية أو الثوابت : نفرض أن ϕ دالة فى الاحداثيات x^k ، ولتكن ϕ ترمز لقيمة الدالة تحت تحول إلى فئة جديدة من الأحداثيات x^k إذن ϕ تسمى كمية عددية أو ثابت بالنسبة لإحداثيات التحول إذا كان $\phi = \phi$. أى كمية أو ثابت تسمى أيضاً كمية ممتدة من المرتبة صفر .

مجالات الكمية الممتدة : إذا كان لكل نقطة لمنطقة فى فراغ أبعاده N تناظر كمية ممتدة محددة ، نقول أن مجال كمية ممتدة قد عرفت . هذا هو مجال متجه أو مجال كمية عددية تبعاً لما إذا كانت الكمية الممتدة من المرتبة الأولى أو صفراً . يجب أن يلاحظ أن كمية ممتدة أو مجال كمية ممتدة ليس فقط فئة من مركباتها فى نظام إحداثى خاص ولكن كل الفئات الممكنة تحت أى تحول للأحداثيات .

التماثل والتماثل المتخالف للكمية الممتدة : كمية ممتدة تسمى متماثلة بالنسبة إلى إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف أو إثنين من الأسس المتحدة الاختلاف إذا كانت مركباتهما تبقى بدون تغير مع تبادل الأسس . لذلك إذا كان $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$ فإن الكمية الممتدة تكون متماثلة فى m و p .

إذا كانت الكمية الممتدة متماثلة بالنسبة لأى إثنين من الأسس المتضادة الاختلاف وأى إثنين من الأسس المتحدة الاختلاف تسمى متماثلة .

كمية ممتدة تسمى تماثل متخالف بالنسبة إلى إثنين من الأسس المتضادة الاختلاف أو إلى إثنين من الأسس المتحدة الاختلاف إذا كانت مركباتهما تغير إشارتها مع تبادل الأسس .

ذلك إذا $A_{qs}^{mpr} = -A_{qs}^{pmr}$ الكمية الممتدة تكون تماثل متخالف فى p , m . إذا كانت الكمية الممتدة متخالفة التماثل بالنسبة إلى أى إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف أو أى إثنين من الأسس المتحدة الاختلاف تسمى تماثلا متخالفاً .

عمليات اساسية بالكميات الممتدة :

١ - **الاضافة :** الجمع لإثنين أو أكثر من الكميات الممتدة من نفس المرتبة والنوع (أى أن نفس العدد من الأسس المتضادة الاختلاف ونفس العدد من الأسس المتحدة الاختلاف) يكون أيضاً كمية ممتدة من نفس المرتبة والنوع . لذلك إذا كان $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$ تكون كمية ممتدة ، إذن $C_q^{mp} = A_q^{mp} + B_q^{mp}$. تكون أيضاً كمية ممتدة . إضافة الكميات الممتدة يخضع لقانون التوافق وقانون التبديل .

٢ - **الطرح:** الفرق بين كميتين ممتدتين من نفس المرتبة والنوع تكون أيضاً كمية ممتدة من نفس المرتبة والنوع . لذلك إذا كان A_q^{mp} و B_q^{mp} كميات ممتدة ، إذن $D_q^{mp} = A_q^{mp} - B_q^{mp}$ تكون أيضاً كميات ممتدة .

الضرب الخارجى : حاصل ضرب كميتين ممتدتين تكون كمية ممتدة مرتبتها هى مجموع مرتبات الكميات الممتدة المعطاة . حاصل الضرب هذا يتضمن ضرباً عادياً لمركبات الكمية الممتدة يسمى حاصل الضرب الخارجى . كمثال $A_q^{pr} B_s^m = C_{qs}^{prm}$ هو حاصل الضرب الخارجى لكل من A_q^{pr} و B_s^m على كل حال ، لاحظ أنه

ليس كل كية ممتدة يمكن كتابتها كحاصل ضرب كيتين ممتدتين لمرتبة أدنى . لهذا السبب فإن قسمه الكيات الممتدة ليست دائماً ممكنه .

٤ – **الانكماش (التقلص) :** إذا كان أس واحد متضاد الاختلاف وأس واحد متحد الاختلاف لكية ممتدة وضعا متساويان ، فإن النتيجة تبين أن الجمع على الأسس المتساوية تكون قد أخذت تبعاً لاصطلاح التجميع . هذه النتيجة للجمع هى كية ممتدة من مرتبة إثنين أقل من الكية الممتدة الأصلية . العملية تسمى الانكماش . كمثال ، فى كية ممتدة من المرتبة ٥ ، A^{mpr}_{qs} ، ضع $r = s$ للحصول على $A^{mpr}_{qr} = B^{mp}_{q}$ كية ممتدة من مرتبة ٣ . أيضاً ، بوضع $p = q$ نحصل على $B^{mp}_{p} = C^{m}$ كية ممتدة من مرتبة ١ .

٥ – **ضرب داخلى :** بعملية الضرب الخارجى لكيتين ممتدتين متبوعة بانكماش نحصل على كية ممتدة جديدة تسمى حاصل ضرب داخل للكيات الممتدة المعطاة تسمى هذه العملية ضرباً داخلياً . كمثال ، أعطيت الكيات الممتدة A^{mp}_{q} و B^{r}_{st} ، حاصل الضرب الخارجى يكون $A^{mp}_{q} B^{r}_{st}$. ليكن $q = r$ ، نحصل على حاصل الضرب الداخلى $A^{mp}_{r} B^{r}_{st}$ ضع $q = r$ و $p = s$ نحصل على حاصل ضرب داخلى آخر $A^{mp}_{r} B^{r}_{pt}$ الضرب الداخلى والخارجى للكيات الممتدة تكون تبادلية ومتوافقة .

٦ – **قانون خارج القسمة :** نفترض أنه غير معروف ما إذا كان الكية X هى كية ممتدة أم لا . إذا كان حاصل الضرب الداخلى للكية X بكية ممتدة اختيارية ، يكون نفسها كية ممتدة إذن X يكون أيضاً كية ممتدة هذا يسمى قانون خارج القسمة .

المصفوفات : مصفوفة من الرتبة m فى n تكون عبارة عن مجموعة مرتبة من الكيات a_{pq} ، تسمى عناصر ، نظمت فى صفوف m وأعمدة n وعموماً يرمز لها كالآتى

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} , \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أو فى صيغة مختصرة تكون $[a_{pq}]$ أو (a_{pq}) ، $p = 1, \dots, m;\ q = 1, \dots, n$. إذا كان $m = n$ فإن المصفوفة تكون مصفوفة مربعة من الرتبة m فى m أو ببساطة m ، إذا كان $m = 1$ تكون مصفوفة صف أو متجه صف ، إذا كان $n = 1$ تكون مصفوفة عمود أو متجه عمود .

قطر المصفوفة المربعة يحوى العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ يسمى القطر الأساسى أو القطر الرئيسى . المصفوفة المربعة التى عناصرها تساوى واحد فى القطر الأساسى وصفرا فى أى مكان آخر تسمى وحدة مصفوفة وتعرف بالرمز I . المصفوفة المتزنة (الصفرية) تعرف بالرمز O ، تكون مصفوفة كل عناصرها تساوى صفراً .

جبر المصفوفات : إذا كان $A = (a_{pq})$ و $B = (b_{pq})$ هي مصفوفات لها نفس الرتبة (m فى n) إذن :

١ — $A = B$ إذا وإذا كان فقط $a_{pq} = b_{pq}$

٢ — المجموع S والفرق D تكون عبارة عن مصفوفات معرفة كالآتى

$$S = A+B = (a_{pq}+b_{pq}), \qquad D = A-B = (a_{pq}-b_{pq})$$

٣ — حاصل الضرب $P = AB$ معرفة فقط عندما يكون عدد الأعمدة n فى المصفوفة A يساوى عدد الصفوف فى المصفوفة B ويعطى بالمعادلة

$$P = AB = (a_{pq})(b_{pq}) = (a_{pr}\, b_{rq})$$

حيث $a_{pr}\, b_{rq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr} b_{rq}$ باستخدام اصطلاح التجمع . المصفوفات التى يكون حاصل ضربها معرفاً تسمى متوافقة .

عموماً ، ضرب المصفوفات غير تبادل ، أى أن $AB \neq BA$ ، على كل حال فإن قانون التوافق لضرب المصفوفات يكون سارياً أى أن $A(BC) = (AB)C$ بشرط أن تكون المصفوفات متوافقة . أيضاً يكون قانون التوزيع سارياً ، أى أن $A(B+C) = AB + AC,\ (A+B)C = AC + BC$.

٤ — المحدد للمصفوفة المربعة $A = (a_{pq})$ يرمز له كالآتى $|a_{pq}|$, $\det A$, $|A|$ أو $\det(a_{pq})$

إذا كان $P = AB$ إذن $|P| = |A|\,|B|$.

٥ — العكس لمصفوفة مربعة A هى مصفوفة A^{-1} بحيث أن $AA^{-1} = I$ حيث I هى وحدة مصفوفة . الشرط اللازم والكافى لكى يكون A^{-1} موجود هو أن $\det A \neq 0$. إذا كان $A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة فردية .

٦ — حاصل ضرب الكمية العددية λ فى المصفوفة $A = (a_{pq})$ يرمز لها λA ، يكون المصفوفة (λa_{nq}) حيث كل عنصر المصفوفة A يكون مضروباً فى λ

٧ — تبديل وضع المصفوفة A يكون مصفوفة A^T التى كونت من A بواسطة تبديل صفوفها وأعمدتها . لذلك إذا كان $A = (a_{pq})$ ، إذن $A^T = (a_{pq})$ تبديل وضع المصفوفة A يرمز له أيضاً A

عنصر الخط وكمية ممتدة مترية : فى الاحداثيات العمودية (x, y, z) تفاضل طول القوس ds يمكن الحصول عليه من $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ بالتحول إلى إحداثيات منحنى الأضلاع العامة (أنظر مسألة ١٧ ، فصل ٧) هذا يصبح $ds^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, du_p du_q$. مثل هذه الفراغات يسمى الفراغات الأقليدية ذات الأبعاد الثلاثة *Evclidean spaces* .

يكون تعميم الفراغ ذو N من أبعاد باحداثيات $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ مباشراً . نعرف عنصر الخط ds فى هذا الفراغ المعطى بالصيغة الرباعية ، تسمى صيغة مترية أو مترى .

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} g_{pq} dx^p dx^q$$

أو ، باستخدام اصطلاح التجميع

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q$$

في الحالة الخاصة حيث يوجد تحول الاحداثيات من x^j إلى $\bar{x}^k$ بحيث أن الصيغة المترتبة تكون قد حولت إلى $(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + \dots + (d\bar{x}^N)^2$ or $d\bar{x}^k d\bar{x}^k$ وبالتالي يسمى الفراغ فراغ إقليدس ذو N من ابعاد . في الحالة العامة على كل حال ، يسمى الفراغ ريماني Riemannian .

الكميات g_{pq} هي مركبات الكمية الممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة أثنين تسمى كمية ممتدة مترية أو كمية ممتدة أساسية . يمكننا ودائماً إختيار هذه الكمية الممتدة لتكون متماثلة (أنظر مسألة ٢٩) .

ترافق (اقتران) او تعاكس ــ مقلوب ــ الكميات الممتدة : ليكن $g = |g_{pq}|$ ترمز لمحدد بالعناصر g_{pq} وافرض $g \neq 0$. عرف g^{pq} بواسطة

$$g^{pq} = \frac{\text{cofactor of } g_{pq}}{g}$$

إذن g^{pq} تكون كية ممتدة متماثلة ومتضادة الاختلاف من المرتبة الثانية تسمى موافق أو معاكس الكمية الممتدة للقيمة g_{pq} (أنظر مسألة ٣٤) . يمكن إيضاح (مسألة ٣٣) أن

$$g^{pq} g_{rq} = \delta_r^p$$

كميات ممتدة مترافقة (متشاركة) : معطى كية ممتدة ، يمكننا اشتقاق كيات ممتدة أخرى بواسطة رفع أو خفض الأسس . كمثال ، معطى الكمية الممتدة A_{pq} نحصل بواسطة رفع الأس p على الكمية الممتدة $A^p{}_{.q}$ وتبين النقطة المكان الأصل للأس المتحرك . برفع الأس q نحصل أيضاً على A^{pq} . حتى لايحدث لبس يمكن عاده أن نحذف النقطة ، لذلك A^{pq} يمكن أن نكتب A^{pq} هذه الكميات الممتدة المشتقة يمكن الحصول عليها بتكوين الضربيات الداخلية للكمية الممتدة المعطاة بالكمية الممتدة المترية g_{pq} أو مرافقها (قرينها) g^{pq} لذلك ، كمثال

$$A^p{}_{.q} = g^{rp} A_{rq}, \quad A^{pq} = g^{rp} g^{sq} A_{rs}, \quad A^p{}_{.rs} = g_{rq} A^{pq}{}_{..s}$$

$$A^{qm.tk}{}_{..n} = g^{pk} g_{sn} g^{rm} A^{q.st}{}_{.r..p}$$

يصبح ذلك واضحاً إذا فسرنا الضربيات في g^{rp} كمعنى : ليكن $r = p$ (أو $p = r$) أيهما يتبع . ورفع هذا الأس . بالمثل إذا فسرنا الضربيات في g_{rq} كمعنى : ليكن $r = q$ (أو $p = r$) أيهما يتبع وأخفض هذا الأس .

كل الكيات الممتدة التي حصلنا عليها من كية ممتدة معطاة بتكوين ضربيات داخلية بالكية الممتدة المترية ومرافقها(قرينها) تسمى كيات ممتدة متشاركة للكية الممتدة المعطاة . كمثال A^m و A_m كيات ممتدة ، متشاركة الأول مركبات متضادة الاختلاف والثانية مركبات متحدة الاختلاف . العلاقة بينهم تعطى بالمعادلة :

$$A_p = g_{pq} A^q \quad \text{أو} \quad A^p = g^{pq} A_q$$

للأحداثيات العمودية $g_{pq} = 1$ إذا كان $p = q$ و 0 إذا كان $p \neq q$ بحيث أن $A_p = A^p$ والتي توضح لماذا لم يحصل تمييز بين المركبات المتضادة الاختلاف والمركبات المتحدة الاختلاف للمتجه في الأبواب السابقة .

طول المتجه ــ الزاوية بين المتجهات : الكية $A^p B_p$ هي حاصل الضرب الداخلي للكيات A^p و B_q و تكون كية عددية مشابهة لحاصل ضرب الكية العددية في الاحداثيات العمودية . تعرف الطول L لمتجه A^p أو A_p كما هو معطى بالمعادلة

$$L^2 = A^p A_p = g^{pq} A_p A_q = g_{pq} A^p A^q$$

يمكننا تعريف الزاوية θ بين A^p و B_p كما هو معطى بالعلاقة

$$\cos\theta = \frac{A^p B_p}{\sqrt{(A^p A_p)(B^p B_p)}}$$

المركبات الفزيائية : لمتجه A^p أو A_p يرمز لها A_u, A_v, A_w هي إسقاط المتجه على المماسات لإحداثي المنحنيات والمعطاة في حالة الاحداثيات العمودية بالمعادلات .

$$A_u = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad A_v = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad A_w = \sqrt{g_{33}}\, A^3 = \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

بالمثل المركبات الفيزيائية للقيمة الممتدة A^{pq} أو A_{pq} تعطى بالمعادلات :

$$A_{uu} = g_{11} A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}}, \quad A_{uv} = \sqrt{g_{11} g_{22}}\, A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad A_{uw} = \sqrt{g_{11} g_{33}}\, A^{13} = \frac{A_{13}}{\sqrt{g_{11} g_{33}}},$$

وهكذا

رموز كريستوفيل : الرمز

$$[pq,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{sr}[pq,r]$$

تسمى رموز كريستوفيل للنوع الأول والثانى على الترتيب . تستعمل رموز أخرى بدلا من $\left\{ {bd \atop s} \right\}$ وهى { عدد pq } و Γ^{s}_{pq} . الرمز الأخير يقترح على أى حال خواص الكمية الممتدة التى لاتكون حقيقية بصفة عامة .

قوانين التحول لرموز كريستوفيل : إذا رمزنا بشرطة أفقية لرمز فى نظام إحداثى x^k إذن

$$\overline{[jk,m]} = [pq,r] \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

$$\overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} = \left\{ {s \atop pq} \right\} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

هى قوانين التحول لرموز كريستوفيل تبين أنهم ليسوا كميات ممتدة إلا إذا كانت الحدود الثانية على اليمين تساوى صفراً .

جوديسيات (علم المساحة — التطبيقية) : المسافة s بين نقطتين t_1 و t_2 على منحنى $x^r = x^r(t)$ فى فراغ ريمان Riemannian · يعطى بالمعادلة

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}}\, dt$$

ذلك المنحنى فى الفراغ الذى يجعل المسافة أقل ما يمكن يسمى جيوديس الفراغ . باستعمال حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات (أنظر مسائل ٥٠ و ٥١) توجد الجيوديسية من المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \left\{ {r \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

حيث S هو بارامتر طول القوس . كأمثلة ، الجيوديسيات على مستوى يكون خطوطاً مستقيمة والجيوديسيات على كرة تكون أقواس دوائر كبيرة .

المشتقات المتحدة الاختلاف : لكمية ممتدة A_p بالنسبة إلى x^q تبين بالرمز $A_{p,q}$ وتعرف بالمعادلة

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s$$

كمية ممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة اثنين .

المشتقة المتحدة الاختلاف لكمية ممتدة A^p بالنسبة إلى x^q تبين بالرمز $A^p{}_{,q}$ وتعرف بالمعادلة

$$A^p{}_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ {p \atop qs} \right\} A^s$$

– هى كية ممتدة مختلطة من المرتبة أثنين .

النظم العمودية ، تكون رموز كريستوفيل صفراً والمشتقات متحدة الاختلاف تكون هى المشتقات الجزيئه العاديه .
المشتقات المتحدة الاختلاف للكيات الممتدة تكون أيضاً كيات ممتدة (أنظر مسألة ٥٢)

يمكن سريان النتائج السابقة إلى مشتقات متحدة الاختلاف للكميات الممتدة ذات مرتبة أعلى لذلك فإن

$$A^{p_1 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_n, q} = \frac{\partial A^{p_1 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_n}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop r_1 q} \right\} A^{p_1 \cdots p_m}_{s r_2 \cdots r_n} - \left\{ {s \atop r_2 q} \right\} A^{p_1 \cdots p_m}_{r_1 s r_3 \cdots r_n} - \cdots - \left\{ {s \atop r_n q} \right\} A^{p_1 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_{n-1} s}$$
$$+ \left\{ {p_1 \atop qs} \right\} A^{s p_2 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_n} + \left\{ {p_2 \atop qs} \right\} A^{p_1 s p_3 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_n} + \cdots + \left\{ {p_m \atop qs} \right\} A^{p_1 \cdots p_{m-1} s}_{r_1 \cdots r_n}$$

هى مشتقة متحدة الاختلاف للمقدار $A^{p_1 \cdots p_m}_{r_1 \cdots r_n}$ بالنسبة إلى x^q

قوانين التفاضل المتحدة الاختلاف لحاصل جمع و حاصل ضرب الكيات الممتدة تكون مثلها مثل تلك التى للتفاضل العادى .
فى إجراء التفاضلات ، الكميات الممتدة g_{pq}, g^{pq} و δ^p_q و يمكن أن تعامل كثوابت حيث مشتقاتهما المتحدة الاختلاف
تكون صفراً (أنظر مسألة ٥٤) حيث أن المشتقات المتحدة الاختلاف تعبر عن معدل التغير لكميات فيزيائية مستقلة عن أى
إطارات مقارنة . فإنها ذات أهمية عظمى فى التعبير عن القوانين الفيزيائية .

رموز التبديل والكميات الممتدة عرف e_{pqr} بالعلاقة

$e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1, \quad e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1, \quad e_{pqr} = 0$ إذا كان اثنين أو أكثر من الأسس
متساوية وتعرف e^{pqr} بنفس الطريقة .

فإن الرموز e_{pqr} و e^{pqr} تسمى رموز تبادلية فى فراغ ذو ثلاث أبعاد

أخيراً ، دعنا نعرف

$$\epsilon_{pqr} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_{pqr}, \qquad \epsilon^{pqr} = \sqrt{g}\, e^{pqr}$$

يمكن أن نبين أن ϵ_{pqr} و ϵ^{pqr} هى كيات ممتدة متحدة الاختلاف ومتضادة الاختلاف على الترتيب ، تسمى كيات
ممتدة تبادلية . فى فراغ ثلاثى الأبعاد . يمكن أيضاً تعميم ذلك لأبعاد أعلى (أكثر من ثلاث أبعاد)

صيغة الكمية الممتدة للانحدار والتباعد والالتفاف :

١ – **الانحدار** : إذا كانت Φ كية عددية أو ثابت فإن الانحدار Φ يعرف بالمعادلة

$$\nabla\Phi = \text{grad}\,\Phi = \Phi,_p = \frac{\partial\Phi}{\partial x^p}$$

حيث $\Phi,_p$ تكون مشتقات متحدة الاختلاف للكية Φ بالنسبة إلى x^p

٢ – **تباعد** : التباعد للكية A^p هي الانكماش لمشتقتها المتحدة الاختلاف بالنسبة إلى x^q ، أى أنه الانكماش للكية $A^p,_q$. إذن

$$\text{div}\,A^p = A^p,_p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$$

٣ – **التفـاف** : الالتفاف للكية A_p هو $A_{p,q} - A_{q,p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$ كية ممتدة من المرتبة اثنين . يعرف أيضاً الالتفاف (الملوج) بالكية $\in^{pqr} A_{p,q}$ —

٤ – **لابلاس** : اللابلاسى Φ هو التباعد للانحدار Φ أو

$$\nabla^2\Phi = \text{div}\,\Phi,_p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,g^{jk}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\right)$$

فى حالة $g < 0$ لابد أن نستبدل $\sqrt{g}$ القيمة $\sqrt{-g}$. كلتا الحالتين $g > 0$ و $g < 0$ يمكن أن تحتوى بكتابة $\sqrt{|g|}$ بدلا من $\sqrt{g}$.

المشتقة الذاتية أو المطلقة : للكية A_p على طول المنحنى $x^q = x^q(t)$ يرمز لها $\frac{\delta A_p}{\delta t}$ ، تكون قد عرفت على أنها حاصل ضرب داخلى للمشتقة المتحدة الاختلاف للكية A_p و $\frac{dx^q}{dt}$ ، أى أن $A_{p,q}\frac{dx^q}{dt}$ وتعطى بالمعادلة

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = \frac{dA_p}{dt} - \begin{Bmatrix} r \\ p\,q \end{Bmatrix} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

بالمثل نعـرف

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = \frac{dA^p}{dt} + \begin{Bmatrix} p \\ q\,r \end{Bmatrix} A^r \frac{dx^q}{dt}$$

المتجهات A^p أو A_p يقال أنها تتحرك موازياً على طول المنحنى إذا كانت مشتقاتهم الذاتية على طول المنحنى تساوى صفراً ، على الترتيب .

المشتقات الذاتية لكيات ممتدة ذات مرتبة أعلى يمكن تعريفها بالتماثل .

كمياتممتدة مطلقة ونسبية : كية ممتدة $A^{p_1\ldots p_m}_{r_1\ldots r_n}$ تسمى كية ممتدة نسبية للوزن w إذا كانت مركباتها تتحول تبعاً للمعادلة

$$\bar{A}^{q_1\ldots q_m}_{s_1\ldots s_n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} A^{p_1\ldots p_m}_{r_1\ldots r_n} \frac{\partial \bar{x}^{q_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{q_m}}{\partial x^{p_m}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_n}}{\partial \bar{x}^{s_n}}$$

حيث $\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| = J$ هو الجاكوبيان للتحول . إذا كان $w = 0$ فإن الكية الممتدة تسمى مطلقة ويكون هو من نوع الكية الممتدة التى عولجت سابقاً . إذا كانت $w = 1$ فإن الكية الممتدة النسبية تسمى كثافة الكمة الممتدة . عمليات الجمع والضرب .... الخ ، للكيات الممتدة النسبية تكون مشابهة لتلك الكيات الممتدة المطلقة أنظر كثال مسألة ٦٤ .

مسائل محلولة

اصطلاح التجميع :

١ — اكتب كلا من الآتى مستخدماً اصطلاح التجميع

(أ) $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial \phi}{\partial x^N}dx^N$ ، $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}dx^j$

(ب) $\frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{dx^N}{dt}$. $\frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dt}$

(جـ) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \ldots + (x^N)^2$. $x^k x^k$

(د) $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$ ، $ds^2 = g_{kk}dx^k dx^k,\ N = 3$

(هـ) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\,dx^p dx^q$. $g_{pq}\,dx^p dx^q,\ N = 3$

٢ — اكتب الحدود فى كل من التجميعات الموضحة التالية

(أ) $a_{jk}x^k$ $\sum_{k=1}^{N} a_{jk}x^k = a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \ldots + a_{jN}x^N$

(ب) $A_{pq}A^{qr}$ $\sum_{q=1}^{N} A_{pq}A^{qr} = A_{p1}A^{1r} + A_{p2}A^{2r} + \ldots + A_{pN}A^{Nr}$

(جـ) $\bar{g}_{rs} = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s},\ N = 3.$

$$\bar{g}_{rs} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}.$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}\right)$$

$$= g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+ g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+ g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}$$

٧ – إذا كان $x^k, k = 1, 2, \ldots, N$ احداثيات عمودية – ماهو الحل الهندسى إذا وجد – مثلة بكل من المعادلات الآتية لكل من $N = 2, 3$ و $N \geq 4$. افرض أن الدوال فردية القيمة ، لها مشتقات مستمرة ومستقلة ، عند الضرورة .

(أ) $a_k x^k = 1$ حيث a_k مجموعة ثوابت

لقيمة $N = 2,\ a_1x^1 + a_2x^2 = 1$ خط فى بعدين ، أى خط فى مستوى

لقيمة $N = 3,\ a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 1,$ مستوى فى ثلاثة أبعاد

لقيمة $N \geq 4,\ a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_Nx^N = 1$ يكون مستوى زائد

(ب) $x^k = 1$

لقيمة $N = 2,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1,$ دائرة نصف قطرها الوحدة فى المستوى

لقيمة $N = 3,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ كرة نصف قطرها الوحدة

لقيمة $N \geq 4,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^N)^2 = 1$ كرة فوقية نصف قطرها الوحدة

(جـ) $x^k = x^k(u)$

لقيمة $N = 2,\ x^1 = x^1(u),\ x^2 = x^2(u),$ مستوى منحنى بيراميتر u

لقيمة $N = 3,\ x^1 = x^1(u),\ x^2 = x^2(u),\ x^3 = x^3(u)$ منحنى فراغ ثلاثى الأبعاد

لقيمة $N \geq 4$ منحنى فراغ ذو N من الأبعاد

(د) $x^k = x^k(u, v)$

لقيمة $N = 2,\ x^1 = x^1(u, v),\ x^2 = x^2(u, v)$ هو تحول إحداثيات من (u, v) إلى (x^1, x^2)

، لقيمة $N=3,\ x^1 = x^1(u,v),\ x^2 = x^2(u,v),\ x^3 = x^3(u,v)$ سطح ثلاثى الأبعاد ببارامينر u و v

لقيمة $N \geqq 4$ سطح فوق

متجهات وكميات ممتدة متضادة الاختلاف ومتحدة الاختلاف :

٤ – اكتب قانون التحول للكميات الممتدة (أ) A^i_{jk} (ب) B^{mn}_{ijk} (جـ) C^m

(أ)
$$\bar{A}^p_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} A^i_{jk}$$

كمساعدة لتذكر التحول ، لاحظ أن الوضع النسبى للأسس p, q, r على الجانب الشمال للتحول هى نفسها كتلك اللاتى على الجانب الأيمن حيث أن هذه الأسس مترافقة بإحداثيات x وحيث أن الأسس i, j, k تكون مترافقة على الترتيب p, q, r فإن التحول المطلوب يكون سهل كتابته .

(ب)
$$\bar{B}^{pq}_{rst} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} B^{mn}_{ijk}$$

(جـ)
$$\bar{C}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m} C^m$$

٥ – كمية $A(j, k, l, m)$ التى هى دالة للاحداثيات x^i تحولت إلى نظام إحداثيات أخرى $\bar{x}^i$ تبعاً للقاعدة .

$$\bar{A}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} A(j, k, l, m)$$

(أ) هل هذه الكمية ممتدة ؟ (ب) إذا كانت كذلك ، أكتب الكمية الممتدة بتدوين ملائم

(أ) نعم (ب) A^{klm}_j (جـ) متضادة الاختلاف من الرتبة 3 ، متحدة الاختلاف من الرتبة (١) والمرتبة $3 + 1 = 4$

٦ – حدد أياً من الكميات الآتية تكون كمية ممتدة . إذا كانت كذلك اذكر ما إذا كانت متضادة الاختلاف أو متحدة الاختلاف وأعطى مرتبته :

(أ) dx^k (ب) $\dfrac{\partial \phi(x^1, \dots, x^N)}{\partial x^k}$

(أ) افترض تحولات الاحداثيات $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, \dots, x^N)$ إذن $d\bar{x}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k$ وكذلك dx^k تكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد أو متجه متضاد الاختلاف . تذكر أن وضع الأس k يكون لائقاً .

(ب) تحت التحول $x^k = x^k(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$ تكون ϕ دالة فى x^k وبالتالى $\bar{x}^j$ بحيث أن $\phi(x^1, \ldots, x^N) = \bar{\phi}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$
أى أن ϕ تكون كمية عددية أو ثابتة (كمية ممتدة من المرتبة صفر) .

بقانون السلسلة للتفاضل الجزئى $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ و $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ تتحول مثل
$\bar{A}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} A_k$. إذن $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ تكون كمية ممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة واحد أو متجه متحد الاختلاف .

تذكر أن فى $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ يظهر الأس فى المقام ولذلك يفعل مثل رمز سفلى يبين خواصه المتحدة الاختلاف .
نحن نشير إلى كمية ممتدة $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ ومايكافئها الكمية الممتدة بمركبات $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ ، كأنها انحدار لقيمة ϕ تكتب ϕ grad
أو $\nabla \phi$.

٧ – كمية ممتدة متحدة الاختلاف لها مركبات $xy, 2y - z^2, xz$ فى الاحداثيات العمودية . أوجد مركباتها المتحدة الاختلاف فى الاحداثيات الكروية .

ليكن A_j ترمز للمركبات المتحدة الاختلاف فى الاحداثيات العمودية $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ إذن

$$A_1 = xy = x^1x^2, \qquad A_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2, \qquad A_3 = x^1x^3$$

حيث يجب أن تؤخذ الحيطة لتميز بين الرمز السفلى والأسى

ليكن $\bar{A}_k$ يرمز للمركبات المتحدة الاختلاف فى الاحداثيات الكروية $\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \theta, \bar{x}^3 = \phi$ إذن

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} A_j \qquad (1)$$

معادلات التحول بين نظم الاحداثيات هى

$$x^1 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3, \qquad x^2 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3, \qquad x^3 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2$$

إذن المعادلات (١) تعطى المركبات المتحدة الاختلاف المطلوبة

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} A_3 \\
&= (\sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3)(x^1x^2) + (\sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3)(2x^2 - (x^3)^2) + (\cos \bar{x}^2)(x^1x^3) \\
&= (\sin\theta \cos\phi)(r^2 \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi) \\
&\quad + (\sin\theta \sin\phi)(2r \sin\theta \sin\phi - r^2 \cos^2\theta) \\
&\quad + (\cos\theta)(r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi)
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} A_3$$

$$= (r \cos\theta \cos\phi)(r^2 \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi)$$
$$+ (r \cos\theta \sin\phi)(2r \sin\theta \sin\phi - r^2 \cos^2\theta)$$
$$+ (-r \sin\theta)(r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi)$$

$$\bar{A}_3 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} A_3$$

$$= (-r \sin\theta \sin\phi)(r^2 \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi)$$
$$+ (r \sin\theta \cos\phi)(2r \sin\theta \sin\phi - r^2 \cos^2\theta)$$
$$+ (0)(r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi)$$

٨ — بين أن $\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ لاتكون كمية ممتدة حتى ولو كانت A_p كمية ممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة واحد

من الفرض ، $\bar{A}_j = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A_p$ فاضل بالنسبة لقيمة $\bar{x}^k$

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_p}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} A_p$$

حيث أن الحد الثاني على اليمين موجود فإن $\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ لاتحول كما يجب لكمية الممتدة . اخيراً سنبين كيف أن الجمع لكمية ملائمة للمقدار $\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ تسبب أن تصبح النتيجة كمية ممتدة (مسألة ٥٢)

٩ — بين أن سرعة مائع عند أي نقطة يكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد .

سرعة المائع عند أي نقطة لها المركبات $\frac{dx^k}{dt}$ في نظام الاحداثيات x^k في نظام الاحداثيات $\bar{x}^j$ تكون السرعة . $\frac{d\bar{x}^j}{dt}$

لكن

$$\frac{d\bar{x}^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}$$

من قانون السلسلة ، وبالتالي فإن السرعة تكون كمية ممتدة متضادة الأختلاف من الرتبة واحد أو متجه متضاد الاختلاف .

الكرونكر دلتا :

١٠ – احسب (أ) $\delta_q^p A_s^{qr}$ (ب) $\delta_q^p \delta_r^q$

حيث $\delta_q^p = 1$ إذا كان $p = q$ وصفر . إذا كان $p \neq q$ يكون لدينا

$$(أ)\ \delta_q^p A_s^{qr} = A_s^{pr} \qquad (ب)\ \delta_q^p \delta_r^q = \delta_r^p$$

١١ – بين أن $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta_q^p$

إذا كان $p=q$ ، $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = 1$ حيث x^q و x^p

إذا كان $p \neq q$ ، $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = 0$ حيث x^p و x^q مستقلة

إذن $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta_q^p$

١٢ – أثبت أن $\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta_r^p$

الاحداثيات x^p هى دوال للاحداثيات $\bar{x}^q$ والتى بدورها دوال للاحداثيات x^r . إذن من قانون السلسلة ومسألة ١١

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^r} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta_r^p$$

١٣ – إذا كان $\bar{A}^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$ أثبت أن $A^q = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} \bar{A}^p$

اضرب معادلة $\bar{A}^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$ فى $\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$

إذن $\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \bar{A}^p = \dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q = \delta_q^r A^q = A^r$ من المسألة ١٢ . ضع $r = q$ نحصل على النتيجة . هذا يبين أنه فى معادلات التحول لمركبات الكمية الممتدة . فإن الكميات التى يعلوها شرطة والكميات بدونها يمكن أن تتبادل وهى نتيجة يمكن اثباتها بصفة عامة .

١٤ – أثبت أن δ_q^p تكون كمية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية

إذا كان δ_q^p كمية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية يجب أن تحول تبعا للقانون .

$$\bar{\delta}^j_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^p_q$$

الطرف الأيمن يساوى $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} = \delta^j_k$ من مسألة ١٢ . حيث $\bar{\delta}^j_k = \delta^j_k = 1$ إذا كان $j = k$ وصفر إذا كان $j \neq k$ وبالتالى فإن δ^p_q تكون كية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية ، مبررا الرمز المستخدم .

تذكر أننا نستعمل فى بعض الأحيان $\delta_{pq} = 1$ إذا كان $p = q$ وصفر إذا كان $p \neq q$ مثل الكرونكر دلتا . هذا يكون على أى حال ليس كية ممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة الثانية كما قد يظهره الرمز .

عمليات اساسية بالكميات الممتدة :

١٥ – إذا كان A^{pq}_r , B^{pq}_r كيات ممتدة ، أثبت أن مجموعها والفرق بينهما يكون كيات ممتدة .

من الفرض A^{pq}_r و B^{pq}_r تكون كيات ممتدة ، بحيث أن

$$\bar{A}^{jk}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_r$$

$$\bar{B}^{jk}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B^{pq}_r$$

بالجمع

$$(\bar{A}^{jk}_l + \bar{B}^{jk}_l) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A^{pq}_r + B^{pq}_r)$$

بالطرح

$$(\bar{A}^{jk}_l - \bar{B}^{jk}_l) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A^{pq}_r - B^{pq}_r)$$

إذن $A^{pq}_r - B^{pq}_r$ و $A^{pq}_r + B^{pq}_r$ كيات ممتدة لها نفس المرتبة والنوع مثل A^{pq}_r و B^{pq}_r

١٦ – إذا كان A^{pq}_r و B^s_t كيات ممتدة . أثبت أن $C^{pqs}_{rt} = A^{pq}_r B^s_t$ تكون أيضا كية ممتدة .

يجب أن نثبت أن C^{pqs}_{rt} تكون كية ممتدة مركباتها كونت بأخذ حاصل الضرب لمركبات .

الكيات الممتدة A^{pq}_r و B^s_t . حيث A^{pq}_r و B^s_t تكون كيات ممتدة

$$\bar{A}^{jk}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_r$$

$$\bar{B}^m_n = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}B^s_t$$

بالضرب $\bar{A}^{jk}_{l}\bar{B}^{m}_{n} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} A^{pq}_{r} B^{s}_{t}$

التى تبين أن $A^{pq}_{r}B^{s}_{t}$ كية ممتدة من المرتبة 0 ، بأسس متضادة الاختلاف p, q, s وأسس متحدة الأختلاف r, t وهذا مضمون الرمز C^{pqs}_{rt} . نسمى $C^{pqs}_{rt} = A^{pq}_{r}B^{s}_{t}$ حاصل الضرب الخارجى لكمية A^{pq}_{r} ، B^{s}_{t}

١٧ – ليكن A^{pq}_{rst} كية ممتدة (ا) اختار $p = t$ وبين أن A^{pq}_{rqp} يكون كية ممتدة عند استخدام اصطلاح التجميع ، ما هى مرتبتها ؟

(ب) اختر $P = t$ و $q = s$ وبالمثل بين أن A^{pq}_{rqp} تكون كية ممتدة . وهى مرتبتها .

(ا) حيث A^{pq}_{rsp} تكون كية ممتدة .

$$\bar{A}^{jk}_{lmn} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} A^{pq}_{rst} \qquad (\text{أ})$$

يجب أن نبين أن A^{pq}_{rsp} تكون كية ممتدة . ضع الأسس المناظرة j و n تساوى كل منهما الأخرى وأجمع على هذا الأس . إذن

$$\bar{A}^{jk}_{lmj} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} A^{pq}_{rst}$$

$$= \delta^t_p \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} A^{pq}_{rsp}$$

وأيضا A^{pq}_{rsp} يكون كية ممتدة من المرتبة ٣ ويمكن أن توضح بالرمز B^{q}_{rs} عملية وضع الأس المتضاد الأختلاف تساوى الأس المتحد الأختلاف فى كية ممتدة ثم الجمع تسمى انكاش (تقلص) . بمثل هذه العملية فإن كية ممتدة تكون قد كونت و مرتبتها تقل عن مرتبة الكمية الممتده الأصلية باثنين .

(ب) يجب أن نبين أن A^{pq}_{rqp} هى كية ممتدة . ضع $j = n$ و $k = m$ فى معادلة (١) لجزء (أ) وأجمع على j و k لدينـا .

$$\bar{A}^{jk}_{lkj} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} A^{pq}_{rst}$$

$$= \delta_p^t \delta_q^s \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} A_{rst}^{pq}$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} A_{rqp}^{pq}$$

التى تبين أن A_{rqp}^{pq} هى كية ممتدة من المرتبة واحد ويمكن أن يرمز لها C_r . تذكر أنه بالانكماش مرتين . تكون المرتبة قد خفضت بمقدار ٤

١٨ – أثبت أن الانكماش لكية ممتدة A_q^p تكون كية عددية أو ثابتة

لدينا
$$\bar{A}_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} A_q^p$$

ضع $j = k$ واجمع
$$\bar{A}_j^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A_q^p = \delta_p^q A_q^p = A_p^p$$

إذن $\bar{A}_j^j = A_p^p$ وبالتالى فإن A_p^p يجب أن يكون ثابتا حيث A_q^p تكون كية ممتدة من المرتبة اثنين وانكماش بالنسبة إلى أى أس منفرد يخفض الرتبة باثنين يقودنا ذلك إلى تعريف الثابت ككية ممتدة من المرتبة صفر .

١٩ – بين أن الانكماش لحاصل الضرب الخارجى لكية ممتدة A^p و B_q تكون ثابتة .

حيث A^p و B_q تكون كيات ممتدة $\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^p, \quad \bar{B}_k = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} B_q$. إذن

$$\bar{A}^j \bar{B}_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} A^p B_q$$

بالانكماش (ضع $j = k$ واجمع)

$$\bar{A}^j \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A^p B_q = \delta_p^q A^p B_q = A^p B_p$$

وهكذا $A^p B_p$ تكون ثابتة . عملية ضرب الكيات الممتدة (ضرب خارجى) ثم انكماش تسمى ضربا داخليا وتسمى النتيجة حاصل ضرب داخل . حيث $A^p B_p$ كية عددية وتسمى عادة حاصل الضرب العددى للمتجهات A^p و B_q

٢٠ بين أن أى حاصل الضرب الداخل للكيات الممتدة A_r^p و B_t^{qs} تكون كية ممتدة من المرتبة الثالثة .

حاصل ضرب خارجى للكية B_t^{qs} و $A_r^p B_t^{qs} = A_r^p$

ليكن الانكماش بالنسبة للأسس p و t ، أى أن ليكن $p = t$ واجمع . يجب أن نبين أن نتيجة حاصل الضرب الداخلى ، يمثل بواسطة $A_r^p B_p^{qs}$ ويكون كمية ممتدة

من المرتبة الثالثة من الفرض A_r^p و B_t^{qs} هى كميات ممتدة إذن

$$\bar{A}_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} A_r^p, \qquad \bar{B}_n^{lm} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} B_t^{qs}$$

بالضرب ، ليكن $j = n$ والجمع نجـد أن

$$\bar{A}_k^j \bar{B}_j^{lm} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} A_r^p B_t^{qs}$$

$$= \delta_p^t \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A_r^p B_t^{qs}$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A_r^p B_p^{qs}$$

يبين أن $A_r^p B_p^{qs}$ هى كمية ممتدة من المرتبة الثالثة . بالانكماش بالنسبة إلى q و r أو s و r فى حاصل الضرب $A_r^p B_t^{qs}$ بالمثل يمكن أن نبين أن أى حاصل ضرب داخلى يكون كمية ممتدة من المرتبة الثالثة .

طريقة أخرى : حاصل الضرب الخارجى لكميتين ممتدتين يكون كمية ممتدة مرتبة حاصل جمع مرتبات الكميات الممتدة المعطاة . إذن $A_r^p B_t^{qs}$ كمية ممتدة من المرتبة $3 + 2 = 5$. حيث ناتج الانكماش يكون كمية ممتدة مرتبتها أقل من مرتبة الكمية الممتدة المعطاة باثنين وبالتالى فإن أى انكماش لقيمة $A_r^p B_t^{qs}$ تكون كمية ممتدة من المرتبة $5 - 2 = 3$

٢١ – إذا كان $X(p, q, r)$ كمية بحيث أن $X(p, q, r) B_r^{qn} = 0$ لأى كمية ممتدة اختيارية B_r^{qn} ، أثبت أن $X(p, q, r) = 0$ تكون متطابقة .

حيث B_r^{qn} هى كمية ممتدة اختيارية ، اختر مركبة واحدة خاصة (مثلا مركبة بقيم $q = 2, r = 3$) لا تساوى صفرا ، بينما كل المركبات الأخرى تساوى صفرا . إذن $X(p, 2, 3) B_3^{2n} = 0$ بحيث أن $X(p, 2, 3) = 0$ حيث $B_3^{2n} \neq 0$. بأسباب مشابه لكل التوافيق الممكنة لقيمة q و r، لدينا $X(p, q, r) = 0$ ومنها نحصل على النتيجة .

٢٢ – كمية $A(p, q, r)$ بحيث تكون فى نظام احداثى x^i، $A(p, q, r) B_r^{qs} = C_p^s$ حيث B_r^{qs} تكون كمية ممتدة اختيارية و C_p^s كمية ممتدة . اثبت أن $A(p, q, r)$ تكون كمية ممتدة .

فى تحولات الاحداثيات $\bar{x}^i$، $\bar{A}(j, k, l) \bar{B}_l^{km} = \bar{C}_j^m$

إذن $\quad \bar{A}(j,k,l)\, \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} B_r^{qs} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} C_p^s \;=\; \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A(p,q,r)\, B_r^{qs}$

أو

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A(p,q,r) \right] B_r^{qs} = 0$$

ضرب داخلى بواسطة $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m}$ (أى ضرب المقدار $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^t}$ ثم انكماش القيمة $t = m$) ينتج ،

$$\delta_s^n \left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A(p,q,r) \right] B_r^{qs} = 0$$

أو

$$\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A(p,q,r) \right] B_r^{qn} = 0$$

حيث B_r^{qn} كية ممتدة اختيارية ولدينا من المسألة ٢١ ،

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A(p,q,r) = 0$$

ضرب داخلى بواسطة $\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}$ ينتج

$$\delta_m^k \delta_l^n \bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r} A(p,q,r) = 0$$

أو

$$\bar{A}(j,m,n) = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r} A(p,q,r)$$

التى تبين أن $A(p,q,r)$ تكون كية ممتدة ويبرر استخدام الرمز A_{pq}^r

فى هذه المسألة نكون قد أنشأنا حالة خاصة لقانون خارج القسمة التى تنص على أنه إذا كان حاصل الضرب الداخلى لكية X بكية ممتدة اختيارية B يكون كية ممتدة C إذن X تكون كية ممتدة

الكميات الممتدة المتماثلة والمتخالفة التماثل :

٢٢ – إذا كانت الكمية الممتدة A_{st}^{pqr} متماثلة (متخالفة التماثل) بالنسبة إلى الأسس p و q فى نظام احداثى واحد ، بين أنها تبقى متماثلة (متخالفة التماثل) بالنسبة إلى p و q فى أى نظام إحداثى

حيث الأسس p و q متضمنة فقط سنثبت النتيجة لقيمة B^{pq}

إذا كان B^{pq} متماثلة ، $B^{pq} = B^{qp}$ إذن

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} B^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} B^{qp} = \bar{B}^{kj}$$

و B_{pq} تبقى متماثلة فى نظام احداثى x^i

إذا كان B^{pq} تكون متخالفة التماثل $B^{pq} = -B^{qp}$. إذن

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} B^{pq} = -\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} B^{qp} = -\bar{B}^{kj}$$

و B_{pq} تبقى متخالفة التماثل فى نظام احداثى $\bar{x}^i$

النتائج السابقة ، بالطبع ، صالحة للكميات الممتدة المتماثلة (متخالفة التماثل) الأخرى .

٢٤ – بين أن كل كية ممتدة يمكن التعبير عنها كمجموع كيتين ممتدتين ، احداهما متماثلة والأخرى متخالفة التماثل فى زوج من الأسس المتضادة الاختلاف والمتحدة الاختلاف .

اعتبر كمثال ، الكية الممتدة B^{pq} . نجـــد أن

$$B^{pq} = \tfrac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) + \tfrac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp})$$

لكن $R^{pq} = \frac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) = R^{qp}$ تكون متماثلة ، و $S^{pq} = \frac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp}) = -S^{qp}$ تكون متخالفة التماثل . بأسباب مشابهة فإن النتيجة تظهر أنها حقيقية لأى كية ممتدة .

٢٥ – إذا كان $\Phi = a_{jk} A^j A^k$ بين أنه يمكننا أن نكتب دائما $\Phi = b_{jk} A^j A^k$ حيث b_{jk} تكون متماثلة

$$\Phi = a_{jk} A^j A^k = a_{kj} A^k A^j = a_{kj} A^j A^k$$

إذن

$$2\Phi = a_{jk} A^j A^k + a_{kj} A^j A^k = (a_{jk} + a_{kj}) A^j A^k$$

و

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) A^j A^k = b_{jk} A^j A^k$$

حيث $b_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) = b_{kj}$ تكون متماثلة .

المصفوفات :

٢٦ – أكتب حاصل الجمع $S = A + B$ ، الفرق $D = A - B$ وحاصل الضرب $P = AB, Q = BA$ المصفوفات

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = A + B = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & -2-1 \\ 4-4 & -2+1 & 3+2 \\ -2+1 & 1-1 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & -2+1 \\ 4+4 & -2-1 & 3-2 \\ -2-1 & 1+1 & -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = AB = \begin{pmatrix} (3)(2)+(1)(-4)+(-2)(1) & (3)(0)+(1)(1)+(-2)(-1) & (3)(-1)+(1)(2)+(-2)(0) \\ (4)(2)+(-2)(-4)+(3)(1) & (4)(0)+(-2)(1)+(3)(-1) & (4)(-1)+(-2)(2)+(3)(0) \\ (-2)(2)+(1)(-4)+(-1)(1) & (-2)(0)+(1)(1)+(-1)(-1) & (-2)(-1)+(1)(2)+(-1)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 19 & -5 & -8 \\ -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q = BA = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ -12 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

هذا يبين أن $AB \neq BA$ ، أى أن حاصل ضرب المصفوفات لا يكون تباديا بصفة عامة .

٢٧ – إذا كان $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ، بين أن $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A-B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ إذن $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}.$$

إذن $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

حيث أن $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ مع العلم $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

٢٨ – عبر عن معادلات التحول فى صيغة المصفوفات لما يأتى (أ) متجه متحد الاختلاف (ب) كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة الثانية ، بفرض $N = 3$

(أ) معادلات التحول $\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$ يمكن أن تكتب

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

بدلالة أعمدة المتجهات أو ما يعادلها بدلالة صفوف المتجهات .

$$(\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 \ \bar{A}_3) = (A_1 \ A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

(ب) معادلات التحول $\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$ يمكن أن تكتب

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

يمكن جعل هذه النتائج سارية لقيم $N > 3$. الكميات المتجه ذى المرتبات العليا ولو أن صيغة المتجهات لا تصلح .

عنصر الخط والكمية الممتدة المترية :

٢٩ – إذا كان $ds^2 = g_{jk}\, dx^j dx^k$ كية ثابتة ، بين أن g_{jk} تكون كية ممتدة متماثلة متحدة الاختلاف من المرتبة الثانية .

من المسألة ٢٥ ، $\Phi = ds^2$، $A^j = dx^j$ و $A^k = dx^k$; يتبع ذلك أن g_{jk} يمكن اختيارها متماثلة . أيضا حيث تكون ds^2 ثابتة .

$$\bar{g}_{pq}\, d\bar{x}^p\, d\bar{x}^q = g_{jk}\, dx^j\, dx^k = g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} d\bar{x}^p \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q} d\bar{x}^q = g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q} d\bar{x}^p\, d\bar{x}^q$$

إذن $\bar{g}_{pq} = g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}$ و g_{jk} تكون كية ممتدة متماثلة متحدة الاختلاف من المرتبة الثانية، تسمى كية ممتدة مترية .

٣٠ – أوجد الكية الممتدة المترية فى (أ) الأحداثيات الأسطوانية و (ب) الاحداثيات الكروية .

(ا) كما فى المسألة ٧ ، الفصل السابع ، $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$

إذا كان $x^1 = \rho,\ x^2 = \phi,\ x^3 = z$ then $g_{11} = 1,\ g_{22} = \rho^2,\ g_{33} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{23} = g_{32} = 0,\ g_{31} = g_{13} = 0$

فى صيغة المصفوفات الكمية الممتدة المترية يمكن أن نكتب

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) كما فى المسألة ٨ (ا) ، الفصل السابع $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$

إذا كان $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \phi$ الكمية الممتدة المترية يمكن أن تكتب

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

عموما للاحداثيات المتعامدة $g_{jk} = 0$ إذا كان $j \neq k$

٣١ – (ا) عبر عن المحدد $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$ بدلالة العناصر التى فى الصف الثانى وما يناظرها من المعاملات .

(ب) بين أن $g_{jk}\, G(j,k) = g$ حيث $G(j,k)$ هى معامل الكمية g_{jk} فى g حيث التجميع على k فقط

(ا) المعامل للقيمة g_{jk} هو المحدد الذى حصلنا عليه من g بواسطة (١) حذف الصف والعمود التى تظهر فيه g_{jk} و (٢) اجعل العلاقة $(-)^{j+k}$ ترافق هذا المحدد .

لذلك : المعامل للقيمة $g_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$ ، المعامل للقيمة $g_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$

المعامل للقيمة $g_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$

ارمز لهذه المعاملات بواسطة $G(2,1),\ G(2,2)$ and $G(2,3)$ على الترتيب .

إذن من المبادئ الأولية للمحددات .

$$g_{21}\, G(2,1) + g_{22}\, G(2,2) + g_{23}\, G(2,3) = g$$

(ب) بتطبيق النتيجة التى فى (١) على أى صف أو عمود ، لدينا $g = g_{jk}\, G(j,k)$ حيث يكون التجميع على قيم k فقط . هذه النتائج تسرى حيث $g = \left| g_{jk} \right|$ يكون محدد من الرتبة النونية

٣٢ – (١) أثبت أن (أ) $g_{21}\, G(3,1) + g_{22}\, G(3,2) + g_{23}\, G(3,3) = 0$

(ب) أثبت أن $g_{jk}\, G(p,k) = 0 \text{ if } j \neq p$

(١) اعتبر المحدد
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}$$
الذى يساوى صفرا حيث أن الصفين الأخرين يكونان متطابقين .

بالفك تبعا لعناصر الصف الأخير لدينا

$$g_{21}\, G(3,1) + g_{22}\, G(3,2) + g_{23}\, G(3,3) = 0$$

(ب) بوضع العناصر المناظرة لأى صفين (أو عمودين) متساوية يمكن أن نبين كما فى الجزء (١) أن $g_{jk}\, G(p,k) = 0$ إذا $j \neq p$ هذه النتيجة تسرى كذلك للمحددات التى من الرتبة النونية .

٣٣ – عرف $g^{jk} = \dfrac{G(j,k)}{g}$ حيث $G(j,k)$ هو معامل القيمة g_{jk} فى المحدد $g = \left| g_{jk} \right| \neq 0$

أثبت أن $g_{jk}\, g^{pk} = \delta_j^p$

من المسألة ٣١ ، $g_{jk}\, g^{jk} = 1$ أو $g_{jk} \dfrac{G(j,k)}{g} = 1$ حيث يكون التجميع على k فقط

من المسألة ٣٢ ، $g_{jk}\, g^{pk} = 0$ أو $g_{jk} \dfrac{G(p,k)}{g} = 0$ إذا كان $j \neq p$

إذن $g_{jk}\, g^{pk} = 1$ (إذا كان $p = j$ ، وصفر إذا كان $j \neq p$) $= \delta_j^p$.

استخدمنا الرمز g^{jk} ولو لم نبين بعد مسوغا لهذا الرمز . أى أن g^{jk} تكون الكمية الممتدة المضادة الأختلاف من المرتبة الثانية . تحقق ذلك فى المسألة ٣٤ . تذكر أن المعامل كتب على الصورة $G(j,k)$ وليس G^{jk} حيث يمكن أن نبين أنه ليس كية ممتدة بالمعنى العام . مع أن ، يمكن أن نبين أنه كية ممتدة نسبية بوزن C التى تكون متضادة الأختلاف ، بهذا التوسع فى مبدأ الكمية الممتدة فإن الرمز G^{jk} يمكن تبريره (أنظر المسائل المتنوعة مسألة رقم ١٥٢) .

٣٤ – أثبت أن g^{jk} تكون كية ممتدة متماثلة متضادة الاختلاف من المرتبة الثانية .

حيث g_{jk} تكون متماثلة ، $G(j,k)$ تكون متماثلة وهكذا $g^{jk} = G(j,k)/g$ تكون متماثلة .

إذا كان B^p متجها متضاد الأختلاف اختياريا $B_q = g_{pq} B^p$ يكون متجها متحد الاختلاف اختياريا .

بالضرب فى g^{jq}

$$g^{jq} B_q = g^{jq} g_{pq} B^p = \delta_p^j B^p = B^j \quad \text{أو} \quad g^{jq} B_q = B^j$$

حيث B_q يكون متجها اختياريا ، g^{jk} تكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة الثانية ، بتطبيق قانون خارج القسمة . الكمية الممتدة g^{jk} تسمى الكمية الممتدة المترية المرافقة .

٣٥ – أوجد الكمية الممتدة المترية المرافقة فى (ا) الأحداثيات الأسطوانية و (ب) الاحداثيات الكروية .

(ا) من (المسألة ٣٠ ا)

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$$

$$g^{11} = \frac{\text{cofactor of } g_{11}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{\text{cofactor of } g_{22}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{\text{cofactor of } g_{33}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{12} = \frac{\text{cofactor of } g_{12}}{g} = -\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بالمثل $g^{jk} = 0$ إذا كان $k \neq j$ فى صيغة المصفوفة الكمية الممتدة المترتبة المرافقة يمكن أن تمثل بالآتى

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) من (المسألة ٣٠ ب) $g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\theta$

كما فى الجزء (ا) نجد $g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$ ، $g^{jk} = 0$ for $j \neq k$. وفى صيغة المصفوفة يمكن أن تكتب فى الصورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

٣٦ – أوجد (ا) g و (ب) g^{jk} المناظرة للكمية $ds^2 = 5(dx^1)^2 + 3(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6\,dx^1dx^2 + 4\,dx^2dx^3$

(ا) $g_{11} = 5,\ g_{22} = 3,\ g_{33} = 4,\ g_{12} = g_{21} = -3,\ g_{23} = g_{32} = 2,\ g_{13} = g_{31} = 0$ إذن $g = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$

(ب) المامل $G(j,k)$ للقيمة g_{jk} يكون

$$G(1,1)=8,\ G(2,2)=20,\ G(3,3)=6,\ G(1,2)=G(2,1)=12,\ G(2,3)=G(3,2)=-10,\ G(1,3)=G(3,1)=-6$$

إذن $g^{11}=2,\ g^{22}=5,\ g^{33}=3/2,\ g^{12}=g^{21}=3,\ g^{23}=g^{32}=-5/2,\ g^{13}=g^{31}=-3/2$

تذكر أن حاصل ضرب المصفوفات (g_{jk}) و (g^{jk}) تكون هى وحدة المصفوفة 1 أى أن

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الكميات الممتدة المترافقة :

٣٧ – إذا كان $A_j = g_{jk} A^k$ بين أن $A^k = g^{jk} A_j$

بالضرب $A_j = g_{jk} A^k$ by g^{jq}

إذن $g^{jq} A_j = g^{jq} g_{jk} A^k = \delta^q_k A^k = A^q$, i.e. $A^q = g^{jq} A_j$ or $A^k = g^{jk} A_j$

الكميات الممتدة من المرتبة واحد ، A_j و A^k تسمى مترافقة وهى تمثل مركبات المتجه المتضاد الأختلاف والمتحد الأختلاف .

٣٨ – (أ) بين أن $L^2 = g_{pq} A^p A^q$ يكون ثابتا (ب) بين أن $L^2 = g^{pq} A_p A_q$

(أ) ليكن A_j و A^k هى مركبات المتجه المتحد الأختلاف والمتضاد الأختلاف .

إذن $\bar{A}_p = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} A_j, \quad \bar{A}^q = \dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k} A^k$

و $\bar{A}_p \bar{A}^p = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} A_j A^k = \delta^j_k A_j A^k = A_j A^j$

بحيث أن $A_j A^j$ تكون عبارة عن ثابت التى سنسميها L^2 إذن يمكن أن نكتب

$$L^2 = A_j A^j = g_{jk} A^k A^j = g_{pq} A^p A^q$$

(ب) من (١) $L^2 = A_j A^j = A_j g^{kj} A_k = g^{jk} A_j A_k = g^{pq} A_p A_q$

الكية العددية أو الثابتة $L = \sqrt{A_p A^p}$ تسمى مقدار أو طول المتجه له المركبات المتحدة الأختلاف A_p والمركبات المتضادة الأختلاف A^p .

٣٩ – (١) إذا كانت A_p و B^q متجهات ، بين أن $g_{pq} A^p B^q$ تكون ثابتة .

(ب) بين أن $\dfrac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}$ تكون ثابتة

(١) من المسألة ٣٨ ، $A^p B_p = A^p g_{pq} B^q = g_{pq} A^p B^q$ تكون ثابتة .

(ب) حيث $A_p B^q$ و $B^q B_q$ تكون ثوابت $\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}$ تكون ثابتة وكذلك $\dfrac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}$ تكون ثابتة .

نحن نعـــرف

$$\cos\theta = \frac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}$$

كجيب تمام الزاوية بين المتجهين A^p و B^q . إذا $g_{pq} A^p B^q = A^p B_p = 0$ المتجهات تسمى متعامدة .

٤٠ – عبر عن العلاقة بين الكميات الممتدة المترافقة .

(أ) A^{jkl} and A_{pqr} (ب) $A_{j.l}^{.k}$ and A^{qkr} (ج) $A_{.q..t}^{p.rs.}$ and $A_{jqk}^{...sl}$

(أ) $A^{jkl} = g^{jp} g^{kq} g^{lr} A_{pqr}$ أو $A_{pqr} = g_{jp} g_{kq} g_{lr} A^{jkl}$

(ب) $A_{j.l}^{.k} = g_{jq} g_{lr} A^{qkr}$ أو $A^{qkr} = g^{jq} g^{lr} A_{j.l}^{.k}$

(ج) $A_{.q..t}^{p.rs.} = g^{pj} g^{rk} g_{tl} A_{jqk}^{...sl}$ أو $A_{jqk}^{...sl} = g_{pj} g_{rk} g^{tl} A_{.q..t}^{p.rs.}$

٤١ – أثبت أن الزوايا θ_{23} ، θ_{12} ، θ_{31} بين احداثي المنحنيات في نظام احداثيات الأبعاد الثلاثة تعطى بالعلاقة .

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22} g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33} g_{11}}}$$

على طول احداثي المنحنى (x^1) ، $x^2 =$ كمية ثابتة و $x^3 =$ كمية ثابتة

إذن من الصيغة المترية $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2$ أو $\frac{dx^1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$

لذلك فإن متجه وحدة المماس على طول المنحنى x^1 يكون $A_1^r = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$. بالمثل ، متجهات وحدة المماس على طول احداثي المنحنيات x^2 و x^3 تكون $A_2^r = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r$ و $A_3^r = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$

جيب تمام الزاوية θ_{21} بين $A^r{}_1$ و $A_2{}^r$ تعطى بالمعادلة

$$\cos\theta_{12} = g_{pq}A_1^pA_2^q = g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

بالمثل يمكن أن نحصل على النتائج الأخرى .

٤٢ – أثبت أن لنظام احداثي متعامد يكون $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$

ينتج ذلك مباشرة من المسألة ٤١ بوضع $\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 90^\circ$ من الحقيقة أن $g_{pq} = g_{qp}$ ينتج أيضا أن $g_{21} = g_{32} = g_{13} = 0$.

٤٣ – أثبت أن لنظام احداثي متعامد يكون $g_{11} = \frac{1}{g^{11}}$ ، $g_{22} = \frac{1}{g^{22}}$ ، $g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$

من المسألة ٣٣ $g^{pr}g_{rq} = \delta_q^p$

إذا كان $p = q = 1,\ g^{1r}g_{r1} = 1$ أو $g^{11}g_{11} + g^{12}g_{21} + g^{13}g_{31} = 1$

إذن باستخدام المسألة ٤٢ $g_{11} = \frac{1}{g^{11}}$

بالمثل إذا $p = q = 2,\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}}$ ، وإذا $p = q = 3,\ g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$

رموز كريستوفيل :

٤٤ – أثبت (أ) $[pq,r] = [qp,r]$ (ب) $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$ (جـ) $[pq,r] = g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$

(أ) $$[pq,r] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r}\right) = [qp,r]$$

(ب) $$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} = g^{sr}[pq,r] = g^{sr}[qp,r] = \begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

(جـ) $g_{ks}\left\{ {s \atop pq} \right\} = g_{ks} g^{sr}\ [pq,r] = \delta^r_k\ [pq,r] = [pq,k]$

أو $[pq,k] = g_{ks}\left\{ {s \atop pq} \right\}$ i.e. $[pq,r] = g_{rs}\left\{ {s \atop pq} \right\}$

تذكر أن ضرب $[pq,r]$ فى g^{sr} لها تأثير تبديل r بالقيمة s ، رفع هذا الأس وابدال الأقواس المربعة بأقواس مزدوجة لينتج $\left\{ {s \atop pq} \right\}$ بالمثل ، ضرب $\left\{ {s \atop pq} \right\}$ فى g_{rs} أو g_s لها تأثير احلال s محل r ، خفض هذا الأس وتبديل الأقواس المزدوجة بأقواس مربعة لينتج $[pq,r]$

٤٥ – أثبت (أ) $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = [pm,q] + [qm,p]$

(ب) $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\left\{ {q \atop mn} \right\} - g^{qn}\left\{ {p \atop mn} \right\}$ (جـ) $\left\{ {p \atop pq} \right\} = \dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$

(أ) $[pm,q] + [qm,p] = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \dfrac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \dfrac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right) + \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \dfrac{\partial g_{mp}}{\partial x^q} - \dfrac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right) = \dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$

(ب) $\dfrac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij}) = \dfrac{\partial}{\partial x^m}(\delta^k_i) = 0$ إذن

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \quad \text{أو} \quad g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij} = 0$$

بالضرب فى g^{ir}، $g^{ir}g_{ij}\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$

أى أن $\delta^r_j\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}([im,j] + [jm,i])$ ،

أو $\dfrac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = -g^{ir}\left\{ {k \atop im} \right\} - g^{jk}\left\{ {r \atop jm} \right\}$

والنتيجة تأتى باحلال r, k, i, j محل على الترتيب p, q, n, n

(جـ) من المسألة ٣١ ، $g = g_{jk}\,G(j,k)$ اجمع على قيم (k فقط).

حيث $G(j,k)$ لا تحتوى على g_{jk} صريحة $\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,r)$ إذن ، التجمع على j و r،

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j,r) \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}$$

$$= g\, g^{jr} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = g\, g^{jr} \left([jm,r] + [rm,j] \right)$$

$$= g \left(\left\{ {j \atop jm} \right\} + \left\{ {r \atop rm} \right\} \right) = 2g \left\{ {j \atop jm} \right\}$$

لذلك

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m} = \left\{ {j \atop jm} \right\} \quad \text{أو} \quad \left\{ {j \atop jm} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \sqrt{g}$$

النتيجة تأتى باحلال j محل p وكذلك محل q

٤٦ – اشتق قوانين التحول لرموز كريستوفيل للآتى (أ) النوع الأول .

(ب) النوع الثانى

(أ) حيث $\bar{g}_{jk} = \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k} g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq} \qquad (1)$$

بالتبديل الدورى للأسس j, k و m و p, q, r

$$\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} g_{rp} \qquad (3)$$

اطرح (١) من حاصل جمع (٢) و (٣) واضرب فى ½ ، نحصل باستخدام تعريف رموز كريستوفيل من النوع الأول على

$$\overline{[jk,m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} [pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq} \qquad (4)$$

(ب) اضرب (٤) في g^{st} $\bar{g}^{nm} = \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}$ لنحصل على

$$\bar{g}^{nm}\,\overline{[jk,m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}\,[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^r_t g^{st}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^q_t g^{st} g_{pq}$$

إذن

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

حيث

$$\delta^r_t g^{st}[pq,r] = g^{sr}[pq,r] = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} \text{ and } \delta^q_t g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta^s_p$$

٤٧ – أثبت

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ pq \end{Bmatrix}$$

من المسألة ٤٦ (ب)

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

اضرب في $\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$ ،

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^m_s\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\delta^m_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}$$

حل الكمية $\dfrac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}$ ، نحصل على النتيجة

٤٨ – احسب رموز كريستوفيل للآتي (أ) النوع الأول (ب) النوع الثاني ، الفراغ حيث $g_{pq} = 0$ إذا كان $p \neq q$

(أ) إذا كان $p = q = r$

$$[pq,r] = [pp,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

إذا كان $p = q \neq r$.

$$[pq,r] = [pp,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

إذا كان $p = r \neq q$.

$$[pq,r] = [pq,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

إذا كان p, q, r متميزة فإن $[pq,r] = 0$

لم يستخدم هنا اصطلاح التجميع

(ب) من المسألة ٤٣ ، $g^{jj} = \frac{1}{g_{jj}}$ لم تجمع . إذن

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{sr}[pq,r] = 0 \text{ if } r \neq s \text{, and } = g^{ss}[pq,s] = \frac{[pq,s]}{g_{ss}}$$

(لم تجمع) إذا كان $r = s$

من (١)

إذا كان $p = q = s$ ،

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {p \atop pp} \right\} = \frac{[pp,p]}{g_{pp}} = \frac{1}{2g_{pp}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^p} \ln g_{pp}$$

إذا كان $p = q \neq s$ ،

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {s \atop pp} \right\} = \frac{[pp,s]}{g_{ss}} = -\frac{1}{2g_{ss}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}$$

إذا كان $p = s \neq q$ ،

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {p \atop pq} \right\} = \frac{[pq,p]}{g_{pp}} = \frac{1}{2g_{pp}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^q} \ln g_{pp}$$

إذا كان p, q, s متميزة ، فإن

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = 0$$

٤٩ – عين رموز كريستوفيل من النوع الثانى فى (أ) الأحداثيات العمودية (ب) الأحداثيات الأسطوانية (جـ) الأحداثيات الكروية .

يمكننا استخدام نتائج المسألة ٤٨ ، حيث يكون للأحداثيات المتعامدة $g_{pq} = 0$ إذا كان $p \neq q$

(أ) فى الأحداثيات العمودية ، $g_{pp} = 1$ بحيث أن $\left\{ {s \atop pq} \right\} = 0$.

(ب) فى الأحداثيات الأسطوانية ، $x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z$ لدينا من المسألة ٣٠ (أ) ، $g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1$ رموز كريستوفيل الوحيدة التى ليست صفرية تكون من النوع الثانى يمكن أن تحدث حيث $p = 2$ هذه تكون

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = -\rho,$$

$$\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = \frac{1}{\rho}$$

(جـ) فى الأحداثيات الكروية ، $x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = \phi$

لدينا من المسألة ٣٠ (ب) ، $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2\theta$ رموز كريستوفيل الوحيدة التى ليست صفرية من النوع الثانى يمكن أن تحدث حيث $p = 2$ أو 3 هذه تكون

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -r$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2\theta) = -r \sin^2\theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2\theta) = \cot\theta$$

جيوديسيات (المساحة التطبيقية)

٥٥ – أثبت أن الشرط اللازم لكي يكون $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\, dt$ طرف نهاية (النهاية الكبرى أو نهاية صغرى) أن يكون $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

ليكن المنحنى الذي يجعل I طرف نهاية هو $x = X(t),\ t_1 \leq t \leq t_2$ إذن $x = X(t) + \epsilon\eta(t)$

حيث ϵ لا يعتمد على t ، يكون منحنى مجاور خلال t_1 و t_2 بحيث أن $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ قيمة I المنحنى المجاور تكون

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ X+\epsilon\eta,\ \dot{X}+\epsilon\dot{\eta})\, dt$$

هذا يكون طرف نهاية لقيمة $\epsilon = 0$. الشرط اللازم لكي يكون لهذا طرف نهاية هو أن $\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$. لكن باتفاضل تحت علامة التكامل ، مفترضا صلاحية .

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt = 0$$

التي يمكن أن تكتب كالآتي

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x}\eta\, dt + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right) dt = 0$$

حيث أن η اختيارية ، التكاملية $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

النتيجة يمكن امتدادها بسهولة التكامل $\int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \dot{x}^1, x^2, \dot{x}^2, \ldots, x^N, \dot{x}^N)\, dt$

وتنتج $\dfrac{\partial F}{\partial x^k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0$

تسمى معادلات أيلر أو لاجرانج (أنظر أيضاً مسألة ٧٣) .

٥١ – بين أن الجيوديسيات فى فراغ ريمان يعطى بالمعادلة $\dfrac{d^2x^r}{ds^2} + \left\{ {r \atop pq} \right\} \dfrac{dx^p}{ds} \dfrac{dx^q}{ds} = 0$

يجب أن نعين طرف النهاية القيمة $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq}\, \dot{x}^p \dot{x}^q}\, dt$ باستخدام معادلات أيلر (مسأله ٥٠) مع

لدينا $F = \sqrt{g_{pq}\, \dot{x}^p \dot{x}^q}$

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\, \dot{x}^p \dot{x}^q)^{-1/2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\, \dot{x}^p \dot{x}^q)^{-1/2}\; 2g_{pk}\, \dot{x}^p$$

باستخدام $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{g_{pq}\, \dot{x}^p \dot{x}^q}$ يمكن كتابه معادلات أيلر

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{pk}\, \dot{x}^p}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = 0$$

أو

$$g_{pk}\, \ddot{x}^p + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^p \dot{x}^q - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{g_{pk}\, \dot{x}^p \ddot{s}}{\dot{s}}$$

بكتابه $\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^p \dot{x}^q = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} + \dfrac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right) \dot{x}^p \dot{x}^q$ هذه المعادله تصبح

$$g_{pk}\, \ddot{x}^p + [pq, k]\, \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{g_{pk}\, \dot{x}^p \ddot{s}}{\dot{s}}$$

إذا استخدمنا طول القوس كبراميتر ، $\dot{s} = 1, \ddot{s} = 0$ والمعادله تصبح

$$g_{pk} \frac{d^2x^p}{ds^2} + [pq, k] \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

بالضرب فى g^{rk} ، نحصل على

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \left\{ {r \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

المشتقة المتحدة الاختلاف :

٥٢ – إذا كان A_p و A^p كميات ممتدة بين أن (أ) $A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s$

و $A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ {p \atop qs} \right\} A^s$ تكون كميات ممتدة

(أ) حيث

$$\bar{A}_j = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} A_r ,$$

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} A_r \qquad (١)$$

من المسأله ٤٧

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left\{ {r \atop il} \right\}$$

بالتعويض فى (١)

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^n} A_r - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left\{ {r \atop il} \right\} A_r$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} \bar{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s$$

أو

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} - \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} \bar{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s \right)$$

والمعادله $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s$ تكون كمية ممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة الثانية تسمى المشتقة متحدة الاختلاف الممتدة A_p بالنسبة إلى x^q وتكتب $A_{p,q}$

(ب) حيث $\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} A^r$

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial A^r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r \qquad (٢)$$

من المسألة ٤٧ ، بإبدال الأحداثيات x و $\bar{x}$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} = \left\{ {n \atop rt} \right\} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t} \overline{\left\{ {j \atop il} \right\}}$$

بالتعويض في (٢)

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\delta^l_k\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^s - \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\bar{A}^i$$

أو

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} + \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ki \end{Bmatrix}}\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s\right)$$

وتكون المعادلة $\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s$ كمية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية ، تسمى المشتقة متحدة الاختلاف للكمية الممتدة A^p بالنسبة إلى x^q وتكتب $A^p_{,q}$

٥٣ — أكتب المشتقة متحدة الاختلاف بالنسبة إلى x^q لكل من الكميات الممتدة الآتية (أ) A_{jk} (ب) A^{jk} (جـ) A^j_k (د) A^j_{kl} (هـ) A^{jkl}_{mn} .

(أ)
$$A_{jk,q} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}A_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A_{js}$$

(ب)
$$A^{jk}_{\ \ ,q} = \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}$$

(جـ)
$$A^j_{k,q} = \frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_k$$

(د)
$$A^j_{kl,q} = \frac{\partial A^j_{kl}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{sl} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^j_{ks} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{kl}$$

(هـ)
$$A^{jkl}_{mn,q} = \frac{\partial A^{jkl}_{mn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{sn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{ms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{skl}_{mn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{jsl}_{mn} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}A^{jks}_{mn}$$

٥٤ — أثبت أن المشتقات المتحدة الاختلاف لكل من (أ) g_{jk} (ب) g^{jk} (جـ) δ^j_k تكون صفراً .

$$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop jq} \right\} g_{sk} - \left\{ {s \atop kq} \right\} g_{js} \qquad (١)$$

باستخدام المسألة ٥٤ (أ)

$$= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq,k] - [kq,j] = 0$$

باستخدام المسألة ٥٤ (ب)

$$g^{jk}_{\ ,q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ {j \atop qs} \right\} g^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} g^{js} = 0 \qquad (ب)$$

$$\delta^j_{k,q} = \frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} \delta^j_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} \delta^s_k = 0 - \left\{ {j \atop kq} \right\} + \left\{ {j \atop qk} \right\} = 0 \qquad (جـ)$$

٥٥ – أوجد المشتقة متحـــدة الاختلاف للكمية $A^j_k B^{lm}_n$ بالنسبة إلى x^q .

$$(A^j_k B^{lm}_n)_{,q} = \frac{\partial (A^j_k B^{lm}_n)}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s B^{lm}_n - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^j_k B^{lm}_s$$

$$+ \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k B^{lm}_n + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^j_k B^{sm}_n + \left\{ {m \atop qs} \right\} A^j_k B^{ls}_n$$

$$= \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k \right) B^{lm}_n$$

$$+ A^j_k \left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop nq} \right\} B^{lm}_s + \left\{ {l \atop qs} \right\} B^{sm}_n + \left\{ {m \atop qs} \right\} B^{ls}_n \right)$$

$$= A^j_{k,q} B^{lm}_n + A^j_k B^{lm}_{n,q}$$

هذا يوضح الحقيقة أن المشتقات المتحدة الاختلاف لحاصل ضرب الكميات الممتدة يخضع لقوانين مثل القوانين العادية لمشتقات الضرب في مبادىء حساب التفاضل والتكامل .

٥٦ – أثبت $(g_{jk} A^{km}_n)_{,q} = g_{jk} A^{km}_{n,q}$.

$$(g_{jk} A^{km}_n)_{,q} = g_{jk,q} A^{km}_n + g_{jk} A^{km}_{n,q} = g_{jk} A^{km}_{n,q}$$

حيث $g_{jk,q} = 0$ من المسألة ٥٤ (أ) . فى تفاضل الكميات المتحدة g_{jk}, g^{jk} و δ^j_k يمكن معاملتها كثوابت

الانحدار ، التباعد والالتفاف فى صيغ كميات ممتدة :

٥٧ – أثبت أن $\text{div } A^p = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$

التباعد للكمية A^p هو الانكماش للمشتقة المتحدة الاختلاف الكمية A^p أى أن الانكماش الكمية $A^p{}_{,q}$ و $A^p{}_{,p}$

إذن ، باستخدام المسألة ٤٥ (جـ) .

$$\text{div } A^p = A^p{}_{,p} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} p \\ pk \end{Bmatrix} A^k$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}\right) A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}\right) A^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$$

٥٨ – أثبت أن $\nabla^2 \Phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right)$

الانحدار الكمية Φ هو $\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$ كمية ممتدة الاختلاف من المرتبة واحد (أنظر مسألة ٦ (ب) معرفة على أنها المشتقة المتحدة الاختلاف الكمية Φ وتكتب على الصورة $\Phi_{,r}$. الكمية الممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد مترافقة مع $\Phi_{,r}$ هى $A^k = g^{kr} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$ إذن من المسألة ٥٧ .

$$\nabla^2 \Phi = \text{div}\left(g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right).$$

٥٩ – أثبت أن $A_{p,q} - A_{q,p} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \dfrac{\partial A_q}{\partial x^p}$

$$A_{p,q} - A_{q,p} = \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s\right) - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix} A_s\right) = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$$

هذه الكمية الممتدة من المرتبة اثنين تعرف على أنها الالتفاف الكمية A_p

٦٠ – عبر عن التباعد المتجه A^p بدلالة مركباته الفيزيائية فى (أ) الأحداثيات الأسطوانية (ب) الأحداثيات الكروية

(أ) الأحداثيات الأسطوانية $x^1 = \rho,\ x^2 = \phi,\ x^3 = z$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \quad \text{and} \quad \sqrt{g} = \rho$$

(أنظر مسألة ٣٠ (أ))

المركبات الفيزيائية ، هي A_ρ, A_ϕ, A_z تعطى بالمعادلات

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = A^1, \quad A_\phi = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = \rho A^2, \quad A_z = \sqrt{g_{33}}\, A^3 = A^3$$

إذن

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

(ب) الأحداثيات الكروية $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \phi$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2\theta$$

و $\sqrt{g} = r^2 \sin\theta$ ، (أنظر مسألة ٣٠ (ب))

المركبات الفيزيائية وهى A_r, A_θ, A_ϕ تعطى بالمعادلات

$$A_r = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = A^1, \quad A_\theta = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = rA^2, \quad A_\phi = \sqrt{g_{33}}\, A^3 = r\sin\theta\, A^3$$

إذن

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\, A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r A_\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

٦١ — عبر عن اللابلاسية لكميات $\Phi,\ \nabla^2\Phi$ فى (أ) الأحداثيات الأسطوانية (ب) الأحداثيات الكروية

(أ) فى الأحداثيات الأسطوانية $g^{11} = 1,\ g^{22} = 1/\rho^2,\ g^{33} = 1$ (أنظر مسألة ٣٥ (أ)) .

إذن من المسألة ٥٨

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

(ب) في الأحداثيات الكروية $g^{11}=1,\ g^{22}=1/r^2,\ g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$ (أنظر مسألة ٣٥ (ب)) . إذن

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\; g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

المشتقات الذاتية :

٦٢ – احسب المشتقات الذاتية لكل من الكميات الممتدة الآتية ، بفرض أنها دوال قابلة للتفاضل في t : (أ) الثابت Φ ، (ب) A^j ، (جـ) A^j_k ، (د) A^{jk}_{lmn}

(أ) $$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \Phi_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$ المشتقات العادية

(ب)
$$\begin{aligned}
\frac{\delta A^j}{\delta t} &= A^j_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\frac{dx^q}{dt}\\
&= \frac{dA^j}{dt} + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\frac{dx^q}{dt}
\end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned}
\frac{\delta A^j_k}{\delta t} &= A^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s\\ kq\end{Bmatrix}A^j_s + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s_k\right)\frac{dx^q}{dt}\\
&= \frac{dA^j_k}{dt} - \begin{Bmatrix} s\\ kq\end{Bmatrix}A^j_s\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s_k\frac{dx^q}{dt}
\end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned}
\frac{\delta A^{jk}_{lmn}}{\delta t} &= A^{jk}_{lmn,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s\\ lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{smn} - \begin{Bmatrix} s\\ mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{lsn}\right.\\
&\qquad \left. - \begin{Bmatrix} s\\ nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{lms} + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{lmn} + \begin{Bmatrix} k\\ qs\end{Bmatrix}A^{js}_{lmn}\right)\frac{dx^q}{dt}\\
&= \frac{dA^{jk}_{lmn}}{dt} - \begin{Bmatrix} s\\ lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{smn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s\\ mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{lsn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s\\ nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{lms}\frac{dx^q}{dt}\\
&\qquad + \begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{lmn}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} k\\ qs\end{Bmatrix}A^{js}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}
\end{aligned}$$

٦٣ – أثبت المشتقات الذاتية للكيات g_{jk}، g^{jk} و δ^j_k تكون صفر .

$$\frac{\delta g_{jk}}{\delta t} = (g_{jk,q})\frac{dx^q}{dt} = 0, \quad \frac{\delta g^{jk}}{\delta t} = g^{jk}{}_{,q}\frac{dx^q}{dt} = 0, \quad \frac{\delta \delta^j_k}{\delta t} = \delta^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = 0$$

من المسألة ٥٤

الكميات الممتدة النسبية :

٦٤ – إذا كان A^p_q و B^{rs}_t كيات ممتدة نسبية لها الأوزان w_1 و w_2 على الترتيب ، بين أن حاصل ضربهما الداخل والخارجى تكون كيات ممتدة نسبية لها الوزن $w_1 + w_2$

من الفرض

$$\bar{A}^j_k = J^{w_1}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^p_q, \qquad \bar{B}^{lm}_n = J^{w_2}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}B^{rs}_t$$

حاصل الضرب الخارجى هو

$$\bar{A}^j_k\,\bar{B}^{lm}_n = J^{w_1+w_2}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}A^p_q\,B^{rs}_t$$

كية ممتدة نسبية لها الوزن $w_1 + w_2$. أى حاصل ضرب داخلى ، الذى هو انكماش حاصل الضرب الخارجى ، يكون أيضاً كية ممتدة نسبية لها الوزن $w_1 + w_2$

٦٥ – أثبت أن $\sqrt{g}$ يكون كية ممتدة نسبية لها الوزن واحد ، أى أن كثافة الكية الممتدة .

عناصر المحدد g المعطاة بواسطة g_{pq} تتحول تبعاً لـ $\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$

بأخذ المحدودات لكل من الطرفين $\bar{g} = \left|\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right|\left|\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\right|g = J^2 g$ أو $\sqrt{\bar{g}} = J\sqrt{g}$ ،

التى تبين أن $\sqrt{g}$ تكون كية ممتدة نسبية لها الوزن واحد .

٦٦ – أثبت أن $dV = \sqrt{g}\;dx^1\,dx^2\,\dots\,dx^N$ تكون ثابتاً

(من المسألة ٦٥)

$$d\bar{V} = \sqrt{\bar{g}}\;d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\dots d\bar{x}^N = \sqrt{g}\;J\;d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\dots d\bar{x}^N$$

$$= \sqrt{g}\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\dots d\bar{x}^N = \sqrt{g}\;dx^1\,dx^2\dots dx^N = dV$$

من هذه المعادلات يأتى أن . إذا كانت Φ ثابتاً ، إذن

$$\int\!\dots\!\int_{\bar{V}}\bar{\Phi}\,d\bar{V} = \int\!\dots\!\int_{V}\Phi\,dV$$

لأى نظم أحداث حيث يكون التكامل قد أجرى على الحجم فى فراغ أبعاده N . يمكن عمل عرض مماثل لتكامل السطوح .

تطبيقات مختلفة :

٦٧ – عبر فى صيغة الكيات الممتدة عن (أ) السرعة . و (ب) العجلة لجسم

(أ) إذا تحرك الجسيم على طول منحنى $x^k = x^k(t)$ حيث t تكون برامتر الزمن ، إذن $v^k = \frac{dx^k}{dt}$ تكون سرعتها وهى كمية ممتدة متضادة لاختلاف من المرتبة واحد » (أنظر مسألة ٩) .

(ب) الكمية $\frac{dv^k}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2}$ عموماً ليست كمية ممتدة وبالتالى لا يمكن أن تمثل الكمية الفيزيائية العجلة فى كل نظم الأحداثيات . نعرف العجلة a^k على أنها المشتقة الذاتية للسرعة أى أن $a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t}$ التى هى كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد .

٦٨ – أكتب قانون نيوتن فى صيغة كمية ممتدة :

افترض أن كتلة الجسيم M هى ثابت لا يعتمد على الزمن t . إذن $Ma^k = F^k{}_a$ تكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد وتسمى القوة على الجسيم . لذلك يمكن كتابة قانون نيوتن فى الصورة

$$F^k = Ma^k = M\frac{\delta v^k}{\delta t}$$

٦٩ – أثبت أن $a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$

حيث v^k تكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف ، لدينا من المسألة ٦٢ (ب)

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{dv^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} v^s \frac{dx^q}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop qp} \right\} v^p \frac{dx^q}{dt}$$

$$= \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

٧٠ – أوجد المركبات الفيزيائية لكل من (أ) السرعة (ب) العجلة لجسيم فى الأحداثيات الأسطوانية .

(أ) من المسألة ٦٧ (أ) ، المركبات المتضادة الاخلاف للسرعة هى

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \quad و \quad \frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

إذن المركبات الفيزيائية للسرعة هى

$$\sqrt{g_{11}}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \sqrt{g_{22}}\frac{dx^2}{dt} = \rho\frac{d\phi}{dt} \quad و \quad \sqrt{g_{33}}\frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

باستخدام $g_{11} = 1,\ g_{22} = \rho^2,\ g_{33} = 1$

(ب) من المسألة ٦٩ و ٤٩ (ب) المركبات المتضادة الاختلاف للعجلة هى

$$a^1 = \frac{d^2x^1}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} \frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\frac{d\phi}{dt})^2$$

$$a^2 = \frac{d^2x^2}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} \frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}$$

و

$$a^3 = \frac{d^2x^3}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

إذن المركبات الفيزيائية للعجلة هى

$$\sqrt{g_{11}}\, a^1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad \sqrt{g_{22}}\, a^2 = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \quad \text{and} \quad \sqrt{g_{33}}\, a^3 = \ddot{z}$$

حيث تدل النقط على التفاضلات بالنسبة للزمن .

٧١ – إذا كانت طاقة الحركة T لجسم له كتلة ثابتة M يتحرك بسرعة مقدارها v تعطى بالمعادلة $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mg_{pq}\,\dot{x}^p\,\dot{x}^q$

أثبت أن

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k$$

حيث a_k تدل على المركبات المتحدة الاختلاف للعجلة

حيث $T = \frac{1}{2}Mg_{pq}\,\dot{x}^p\,\dot{x}^q$ لدينا

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}) = M(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\,\dot{x}^q), \quad \frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\,\dot{x}^q, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = Mg_{kq}\dot{x}^q$$

إذن

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\,\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\,\dot{x}^q\right)$$

$$= M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k})\dot{x}^p\,\dot{x}^q\right)$$

$$= M(g_{kq}\ddot{x}^q + [pq,k]\,\dot{x}^p\,\dot{x}^q)$$

$$= Mg_{kr}\left(\ddot{x}^r + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\dot{x}^p\,\dot{x}^q\right) = Mg_{kr}\,a^r = Ma_k$$

باستخدام المسألة ٦٩ . يمكن استخدام النتيجة للتعبير عن العجلة فى نظام أحداثيات مختلفة .

٧٢ — استخدم المسألة ٧١ لإيجاد المركبات الفيزيالية لعجلة الجسم فى الأحداثيات الأسطوانية

حيث $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$ ، $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$, $v^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$

من المسألة ٧١ مع $x^1 = \rho,\ x^2 = \phi,\ x^3 = z$ نجد

$$a_1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad a_2 = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \quad a_3 = \ddot{z}$$

إذن المركبات الفيزيالية تعطى بالمعادلات

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{a_3}{\sqrt{g_{33}}} \quad \text{or} \quad \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \ddot{z}$$

حيث $g_{11} = 1,\ g_{22} = \rho^2,\ g_{33} = 1$ قارن بمسألة ٧٠ .

٧٣ — إذا كانت قوة متحدة الاختلاف تؤثر على جسيم تعطى بالعلاقة $F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k}$ حيث $V(x^1, \ldots, x^N)$ تكون هى طاقة الوضع ، بين أن $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$ حيث $L = T - V$.

من $L = T - V$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}$ حيث V غير معتمد على $\dot{x}^k$. إذن من المسألة ٧١ ،

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k = F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

الدالة L تسمى لاجرانجين . المعادلات المتضمنة L تسمى معادلات لاجرانج ، وهى مهمة فى الميكانيكا ، من المسألة ٥٠ ، يتضح أن نتائج هذه المسألة تعادل القول بأن جسيم يتحرك بطريقة بحيث يكون $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ طرف نهاية . هذه تسمى مبدأ هاميلتون

٧٤ — عبر عن نظرية التباعد فى صيغة الكميه الممتدة .

ليكن A^k تعرف مجال الكية الممتدة من المرتبة واحد وليكن ν_k تدل على وحدة العمود المرسوم الخارج عند أى نقطة لسطح مغلق يحدد حجم V . إذن نظرية التباعد تقرر أن

$$\iiint_V A^k_{,k}\, dV = \iint_S A^k \nu_k\, dS$$

لفراغ ذو أبعاد N التكامل الثلاثى يستبدل بالتكامل N والتكامل الثنائى يستبدل بالتكامل $N - 1$. الثابت $A^k_{,k}$ يكون هو التباعد للكية A^k (أنظر مسألة ٥٧) الثابت $A^k \nu_k$ هو حاصل الضرب العددى للمقدار A^k و ν_k ، مشابهة للكية $\mathbf{A \cdot n}$ فى التدوين الرمزى فى الفصل الثانى .

استطعنا أن نعبر عن النظرية في صيغة الكمية الممتدة ، وبذا يكون ذلك صحيحا لكل نظم الاحداثيات حيث أنها تكون صحيحة للنظم العمودية (أنظر الباب السادس) . أنظر أيضا المسألة ٦٦ .

٧٥ – عبر عن معادلات ماكسويل (أ) $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ (ب) $\text{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$ (جـ) $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ (د) $\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{I}}{c}$ في صيغة كمية ممتدة .

عرف الكميات الممتدة B^k, D^k, E_k, H_k, I^k وافرض أن c و ρ تكون ثوابت . إذن يمكن كتابة المعادلات

$$B^k_{,k} = 0 \qquad (\text{أ})$$

$$D^k_{,k} = 4\pi\rho \qquad (\text{ب})$$

$$-\epsilon^{jkq} E_{k,q} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^j}{\partial t} \quad \text{or} \quad \epsilon^{jkq} E_{k,q} = \frac{1}{c}\frac{\partial B^j}{\partial t} \qquad (\text{جـ})$$

$$-\epsilon^{jkq} H_{k,q} = \frac{4\pi I^j}{c} \quad \text{or} \quad \epsilon^{jkq} H_{k,q} = -\frac{4\pi I^j}{c} \qquad (\text{د})$$

هذه المعادلات تكون الأساس للنظرية الكهرومغناطيسية

٧٦ – (أ) أثبت أن $A_{p,qr} - A_{p,rq} = R^n_{pqr} A_n$ حيث A_p كمية ممتدة اختيارية متحدة الاختلاف من المرتبة واحد
(ب) أثبت أن R^n_{pqr} تكون كمية ممتدة (جـ) أثبت $R_{pqrs} = g_{ns} R^n_{pqr}$ تكون كمية ممتدة .

$$A_{p,qr} = (A_{p,q})_{,r} = \frac{\partial A_{p,q}}{\partial x^r} - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix} A_{j,q} - \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix} A_{p,j} \qquad (\text{أ})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j\right) - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} k \\ jq \end{Bmatrix} A_k\right) - \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} l \\ pj \end{Bmatrix} A_l\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r \partial x^q} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j - \begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\partial A_j}{\partial x^r} - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\frac{\partial A_j}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ jq \end{Bmatrix} A_k$$

$$- \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ pj \end{Bmatrix} A_l$$

بابدال q و r والطرح ، نجد

$$A_{p,qr} - A_{p,rq} = \left\{ {j \atop pr} \right\} \left\{ {k \atop jq} \right\} A_k - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ {j \atop pq} \right\} A_j - \left\{ {j \atop pq} \right\} \left\{ {k \atop jr} \right\} A_k + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ {j \atop pr} \right\} A_j$$

$$= \left\{ {k \atop pr} \right\} \left\{ {j \atop kq} \right\} A_j - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ {j \atop pq} \right\} A_j - \left\{ {k \atop pq} \right\} \left\{ {j \atop kr} \right\} A_j + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ {j \atop pr} \right\} A_j$$

$$= R^j_{pqr} A_j$$

حيث

$$R^j_{pqr} = \left\{ {k \atop pr} \right\} \left\{ {j \atop kq} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ {j \atop pq} \right\} - \left\{ {k \atop pq} \right\} \left\{ {j \atop kr} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ {j \atop pr} \right\}$$

باحلال j محل n نحصل على النتيجة

(ب) حيث $A_{p,qr} - A_{p,rq}$ هى كية ممتدة ، $R^n_{pqr} A_n$ هى كية ممتدة ، وحيث أن A_n تكون كية ممتدة اختيارية ، R^n_{pqr} تكون كية ممتدة بقانون خارج القسمة ، هذه الكمية الممتدة تسمى كية ريمان — كريستوفل الممتدة وأحيانا تكتب $R^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,n}_{pqr\cdot}$ ، $R^{n}_{\cdot pqr}$ أو ببساطة R^n_{pqr}

(ج) $R_{pqrs} = g_{ns} R^n_{pqr}$ كية ممتدة مترافقة مع R^n_{pqr} ولذلك تكون كية ممتدة . وتسمى كية ممتدة الانحناء متحد الاختلاف وهو ذو أهمية أساسية فى النظرية النسبية العامة لينشتين

مسائل متنوعة

الاجابة على هذه المسائل المتنوعة معطاة فى آخر هذا الفصل

٧٧ — أكتب كلا من الآتى مستخدما اصطلاح التجميع

(أ) $a_1 x^1 x^3 + a_2 x^2 x^3 + \ldots + a_N x^N x^3$ (ب) $A^{21} B_1 + A^{22} B_2 + A^{23} B_3 + \ldots + A^{2N} B_N$

(ج) $A^j_1 B^1 + A^j_2 B^2 + A^j_3 B^3 + \ldots + A^j_N B^N$ (د) $g^{21} g_{11} + g^{22} g_{21} + g^{23} g_{31} + g^{24} g_{41}$

(ه) $B^{121}_{11} + B^{122}_{12} + B^{221}_{21} + B^{222}_{22}$

٧٨ — أكتب الحدود لكل من التجميعات الموضحة التالية

(أ) $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k),\ N=3$ (ب) $A^{jk} B^p_k C_j,\ N=2$ (ج) $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$

٧٩ — ما هو المحل الهندسى الممثل بالمعادلة $a_k x^k x^k = 1$ حيث $x^k,\ k = 1, 2, \ldots, N.$ هى احداثيات متعامدة ، a_k تكون كية موجبة ثابتة $N = 2, 3$ أو 4

٨٠ — إذ كانت $N = 2$ أكتب نظام المعادلات الممثلة بالمعادلة $a_{pq} x^q = b_p$

٨١ – أكتب قانون التحول للكميات الممتدة (أ) A_k^i (ب) B_m^{ijk} (جـ) C_{mn} (د) A_m

٨٢ – بين ما إذا كانت الكميات $C(j,k,m,n)$ و $B(j,k,m)$ التي تحول من نظام احداثيات x^i إلى آخر $\bar{x}^i$ تبعا للقوانين

(أ) $\bar{B}(p,q,r) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} B(j,k,m)$ (ب) $\bar{C}(p,q,r,s) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} C(j,k,m,n)$

هي كميات ممتدة إذا كان ذلك ، أكتب الكميات الممتدة بتدوين ملائم واعط المرتبة ورتب المتحدة الأختلاف والمتضادة الأختلاف .

٨٣ – كم عدد مركبات الكمية الممتدة من المرتبة ٥ في فراغ ذي ٤ أبعاد .

٨٤ – أثبت أنه إذا كانت مركبات الكمية الممتدة تساوي صفرا في نظام احداثي واحد فإنها تكون صفرا في كل نظم الاحداثيات .

٨٥ – أثبت أنه إذا كانت مركبات كميتين ممتدتين متساوية في نظام احداثي واحد فإنها تكون متساوية في كل نظم الاحداثيات .

٨٦ – بين أن السرعة $\frac{dx^k}{dt} = v^k$ لمائع تكون كمية ممتدة ، ولكن $\frac{dv^k}{dt}$ لا تكون كمية ممتدة .

٨٧ – أوجد مركبات الكمية الممتدة المتحدة الأختلاف والمتضادة الأختلاف في (أ) الأحداثيات الأسطوانية ρ, ϕ, z (ب) الأحداثيات الكروية r, θ, ϕ إذا كانت مركباتها المتحدة الأختلاف في الاحداثيات العمودية هي $2x - z, x^2 y$ و yz .

٨٨ – المركبات المتضادة الأختلاف لكمية ممتدة في الأحداثيات العمودية هي $yz, 3, 2x + y$. أوجد مركباتها المتحدة الأختلاف في الاحداثيات الأسطوانية ذات القطع المكافئ .

٨٩ – احسب (أ) $\delta_q^p B_p^{rs}$ (ب) $\delta_q^p \delta_s^r A^{qs}$ (جـ) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r$ (د) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s$

٩٠ – إذا كان A^{pq}_r كمية ممتدة ، بين أن A^{pr}_r تكون كمية ممتدة متضادة الأختلاف من المرتبة واحد .

٩١ – بين أن $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j \neq k \\ 0 & j = k \end{cases}$ لا تكون كمية ممتدة ومتحدة الأختلاف كما قد بين دلالة الرمز .

٩٢ – إذا كان $\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$ أثبت $A_q = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \bar{A}_p$

٩٣ – إذا كان $\bar{A}_r^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_s^q$ أثبت أن $A_s^q = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \bar{A}_r^p$

٩٤ – إذا كان Φ ثابتا ، حدد ما إذا كان $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}$ كمية ممتدة .

٩٥ – إذا كان B_r و A_q^p كميات ممتدة ، أثبت أن $A_q^p B^q$ ، $A_q^p B^r$ تكون كميات ممتدة وأوجد مرتبة كل منهما .

٩٦ – بين أنه إذا كان A^{pq}_{rs} كية ممتدة ، إذن $A^{pq}_{rs} + A^{qp}_{sr}$ تكون كية ممتدة مماثلة و $A^{pq}_{rs} - A^{qp}_{sr}$ تكون تماثلا متخالفا .

٩٧ – إذا كان A^{pq} و B_{rs} كيات ممتدة متخالفة التماثل ، بين أن $C^{pq}_{rs} = A^{pq} B_{rs}$ تكون متماثلة .

٩٨ – إذا كانت كية ممتدة متماثلة (متخالف التماثل) هل تكرار الانكماش للكية الممتدة تكون أيضا متماثلة (متخالفة – التماثل) ؟

٩٩ – أثبت أن $A_{pq} x^p x^q = 0$ إذا كان A_{pq} كية ممتدة متخالفة التماثل .

١٠٠ – ما هو أكبر عدد للمركبات المختلفة لكية ممتدة متماثلة متضادة الاختلاف من الرتبة اثنين إذا كان

(ا) $N = 4$ (ب) $N = 6$. ما هو العدد لأى قيمة لـ N ؟

١٠١ – كم عدد المركبات غير الصفرية المتميزة ، غير المختلفة فى الإشارة للكمية الممتدة المتحدة الاختلاف المتخالفة التماثل من الرتبة الثالثة ؟

١٠٢ – إذا كان A^{pq}_{rs} كية ممتدة ، أثبت أن الانكماش الثنائى ينتج ثابتا .

١٠٣ – أثبت أن الشرط اللازم والكافى لتصبح كية ممتدة من الرتبة R ثابتة بتكرار الانكماش هو أن R تكون زوجية وأن تكون الأسس المتحدة الأختلاف والمتضادة الأختلاف تساوى $R/2$

١٠٤ – إذا كان A_{pq} و B^{rs} كيات ممتدة ، بين أن حاصل الضرب الخارجى يكون كية ممتدة من المرتبة أربعة وأن حاصل ضرب داخليين يمكن أن يكونا من المرتبة اثنين وصفر على الترتيب .

١٠٥ – إذا كان $A(p,q) B_q = C^p$ حيث B_q كية ممتدة اختيارية متحدة الاختلاف من المرتبة واحد و C^p كية ممتدة متضادة الأختلاف من المرتبة واحد ، بين أن $A(p,q)$ لابد أن تكون كية ثابتة مختلطة من المرتبة اثنين .

١٠٦ – ليكن A^p و B_q كيات ممتدة اختيارية بين أنه إذا كان $A^p B_q C(p,q)$ ثابتا ، إذن $C(p,q)$ تكون كية ممتدة يمكن كتابتها على الصورة C^q_p

١٠٧ – أوجد حاصل الجمع $S = A + B$ ، الفرق $D = A - B$ وحاصل الضرب $P = AB$ و $Q = BA$ ، حيث A و B تكون مصفوفات

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (ا)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (ب)$$

١٠٨ – أوجـد $(3A-2B)(2A-B)$ حيث A و B هي المصفوفات التي في المسألة السابقة .

١٠٩ – (أ) حقق أن $\det(AB) = \{\det A\}\{\det B\}$ للمصفوفات التي في المسألة ١٠٧

(ب) حـل المعادلة $\det(AB) = \det(BA)$ ؟

١١٠ – ليكن $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

بين أن (أ) AB تكون معرفة وأوجدها (ب) BA و $A+B$ تكون غير معرفـة

١١١ – أوجـد x, y و z بحيث أن $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

١١٢ – معكوس المصفوفة المربعة A ، تكتب A^{-1} المعرفة بالمعادلة $AA^{-1} = I$ ، حيث I هي وحدة المصفوفة الز لهـا القيم واحد في قطرها الأساسي وصفر في أي مكان آخـر .

أوجـد A^{-1} إذا (أ) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ (ب) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

هل $A^{-1}A = I$ في هذه الحالات

١١٣ – أثبت أن $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ليس لهـا عكسي

١١٤ – أثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ حيث A و B مصفوفات مربعة غير فردية

١١٥ – عبر بصيغة المصفوفات عن المعادلات المحولة للآتي :

(أ) متجهة متضاد الأختلاف (ب) كمية متحدة الأختلاف من المرتبة اثنين

(جـ) كمية ممتدة مختلطة من المرتبة اثنين .

١١٦ – أوجد قيم الثابت λ بحيث أن $AX = \lambda X$ ، حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ و X مصفوفة اختيارية . هذه القيم للثابت λ تسمى القيم المميزة أو القيم الوحيدة للمصفوفة A .

١١٧ – المعادلة $F(\lambda) = 0$ من المسألة السابقة لإيجاد القيم المميزة للمصفوفة A تسمى المعادلة المميزة للمصفوفة A . بين أن $F(A) = O$ حيث $F(A)$ هي المصفوفة التي حصلنا عليها باحلال λ محل A في المعادلة المميزة وحيث أن الحـد الثابت C حل محل المصفوفة CI ولتكن O هو المصفوفة التي عناصرها تساوى صفر (تسمى المصفوفة المتزنة) النتيجة حالة خاصة من نظرية هاملتن – سيل والتي تذكر أن المصفوفة تحقق معادلتها المميزة .

١١٨ – أثبت أن $(AB)^T = B^T A^T$

١١٩ – أوجد الكمية الممتدة المترية وقرين الكمية الممتدة المترية فى

(أ) الاحداثيات الأسطوانية ذات القطع المكافئ (ب) الأحداثيات الأسطوانية ذات القطع الناقص .

١٢٠ – أثبت أنه تحت التحول المألوف $\bar{x}^r = a_p^r x^p + b^r$ حيث b^r و تكون ثوابت بحيث أن $a_p^r a_q^r = \delta_q^p$

لا يوجد هناك تمييز بين المركبات المتحدة الاختلاف والمتضادة الأختلاف للكمية الممتدة . فى الحالة الخاصة التى يكون فيها التحول من نظم احداثى واحد متعامد إلى آخر ، تسمى الكميات الممتدة كيات ممتدة كرتيزية .

١٢١ – أوجد g و g^{jk} المناظرة للكمية $ds^2 = 3(dx^1)^2 + 2(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6\,dx^1 dx^3$

١٢٢ – إذا كان $A_j = g_{jk} A^k$ بين أن $A^k = g^{jk} A_j$ وبالعكس .

١٢٣ – عبر عن العلاقة بين الكميات الممتدة المترافقة .

(أ) $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$ ، $A^{\cdot\cdot r}_{pq}$ (ب) A_{jql} ، $A^{p\cdot r}_{\cdot q}$ (ج) $A^{\cdot q}_{j}$ ، A^{pq}

١٢٤ – بين أن (أ) $A^{\cdot q}_{p} B^{p}_{\cdot rs} = A^{pq} B_{prs}$ (ب) $A^{pq}_{\cdot\cdot r} B^{\cdot r}_{p} = A^{\cdot q}_{p\cdot r} B^{pr} = A^{\cdot qr}_{p} B^{p}_{\cdot r}$

ثم وضح النتيجة العامة بأن الرمز الدمية فى حد يمكن أن يخفض من مكانه العلوى ويرفع من مكانه السفلى بدون تغيير قيمة الحد .

١٢٥ – بين أنه إذا كان $A^{p}_{\cdot qr} = B^{p}_{\cdot q} C_r$ ، إذن $A_{pqr} = B_{pq} C_r$ ، $A^{\cdot qr}_{p} = B^{\cdot q}_{p} C^r$. ثم وضح النتيجة أن الأس الحر فى معادلة كمية ممتدة يمكن أن يرفع أو يخفض بدون التأثير على صلاحية المعادلة .

١٢٦ – بين أن الكميات الممتدة g_{pq} ، g^{pq} و δ_q^p تكون كميات ممتدة مترافقة .

١٢٧ – أثبت (أ) $\bar{g}_{jk} \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} = g_{pq} \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}$ (ب) $\bar{g}^{jk} \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = g^{pq} \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}$.

١٢٨ – لذا كان A^p مجال متجه ، أوجد وحدة المتجه المناظرة .

١٢٩ – بين أن جيوب تمام الزوايا التى تصنعها وحدة المتجه ثلاثى الأبعاد مع منحنيات الأحداثى تعطى بالعلاقات

$$\frac{U_1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{U_2}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{U_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

١٣٠ – أوجد رموز كريستوفل من النوع الأول فى الأحداثيات

(أ) العمودية . (ب) الأسطوانية (ج) الكروية

١٣١ – أوجد رموز كريستوفل من النوع الأول والثانى فى الأحداثيات

(ا) الأسطوانية ذات القطع المكافئ (ب) الأسطوانية ذات القطع الناقص .

١٣٢ – أوجد المعادلات التفاضلية للجيوديسيات فى الأحداثيات .

(ا) الأسطوانية (ب) الكروية

١٣٣ – بين أن الجيوديسيات على المستوى تكون خطوطا مستقيمة .

١٣٤ – بين أن الجيوديسيات على الكرة تكون أقواسا من دوائر كبيرة .

١٣٥ – أكتب رموز كريستوفل من النوع الثانى للمترية .

$$ds^2 = (dx^1)^2 + [(x^2)^2 - (x^1)^2]\,(dx^2)^2$$

ومعادلات جيوديسى المناظرة .

١٣٦ – أكتب المشتقة المتحدة الأختلاف بالنسبة إلى x^q لكل من الكيات الممتدة الآتية :

(ا) A^{jk}_{l} (ب) A^{jk}_{lm} (جـ) A^{j}_{klm} (د) A^{jkl}_{m} (هـ) A^{jk}_{lmn}

١٣٧ – أكتب المشتقة المتحدة الأختلاف لكل (ا) $g_{jk}A^{k}$ ، (ب) $A^{j}B_{k}$ (جـ) $\delta^{j}_{k}A_{j}$ بالنسبة إلى x^q

١٣٨ – استخدم العلاقة $A^{j} = g^{jk}A_{k}$ لإيجاد المشتقة المتحدة الاختلاف الكية A^{j} من المشتقة المتحدة الاختلاف الكية A_{k} .

١٣٩ – إذا كانت Φ ثابتا ، أثبت أن $\Phi_{,pq} = \Phi_{,qp}$ أى أن رتبة التفاضل المتحدة الاختلاف لثابت غير جوهرية

١٤٠ – بين أن $\in_{pqr}$ و $\in^{qrp}$ تكون كيات ممتدة متحدة الأختلاف ومتضادة الاختلاف على الترتيب .

١٤١ – عبر عن التباعد لمتجه A^{p} بدلالة مركباته الفيزيائية فى الأحداثيات (ا) الأسطوانية ذات القطع المكافئ (ب) الجسم المكافئ .

١٤٢ – أوجد المركبات الفيزيائية لقيمة Φ فى الأحداثيات

(ا) الأسطوانية ذات القطع المكافئ (ب) الأسطوانية ذات القطع الناقص .

١٤٣ – أوجد $\nabla^2\Phi$ فى الأحداثيات الأسطوانية ذات القطع المكافئ

١٤٤ – استخدم رمز الكية الممتدة بين أن (ا) $\text{div curl } A^{r} = 0$ (ب) $\text{curl grad } \Phi = 0$

١٤٥ – أحسب المشتقات الذاتية لكل من مجالات الكية الممتدة الآتية بفرض أنها دوال تفاضلية و

(ا) A_{k} (ب) A^{jk} (جـ) $A_{j}B^{k}$ (د) ϕA^{j}_{k} حيث تكون ثابتا .

١٤٦ – أوجد المشتقة الذاتية لكل (ا) $g_{jk}A^k$ (ب) $\delta^j_k A_j$ (ج) $g_{jk}\delta^j_r A^r_p$

١٤٧ – أثبت. $\frac{d}{dt}(g^{pq}A_p A_q) = 2g^{pq}A_p \frac{\delta A_q}{\delta t}$

١٤٨ – بين أنه إذا لم تؤثر قوة خارجية على جسيم متحرك له كتلة ثابتة يتحرك على جيوديس يعطى بالعلاقة

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^p}{ds}\right) = 0$$

١٤٩ – أثبت أن حاصل الجمع والفرق لكميتين ممتدتين نسبيتين لهم نفس الوزن والنوع تكون أيضا كمية ممتدة نسبية لها نفس الوزن والنوع .

١٥٠ – إذا كان A^{pq}_r كية ممتدة نسبية لها الوزن w ، أثبت أن $g^{-w/2}A^{pq}_r$. تكون كية ممتدة مطلقة

١٥١ – إذا كان $A(p,q)B^{qs}_r = C^s_{pr}$ حيث B^{qs}_r كية ممتدة نسبية اختيارية لها الوزن w_1 و C^s_{pr} كية ممتدة نسبية معروفة لها الوزن w_2 أثبت أن $A(p,q)$ تكون كية ممتدة نسبية لها الوزن $w_2 - w_1$. هذا يكون مثالا على قانون خارج القسمة للكيات الممتدة النسبية .

١٥٢ – بين أن الكية $G(j,k)$ فى حل المسألة ٣١ تكون كية ممتدة نسبية لها الوزن اثنين .

١٥٣ – أوجد المركبات الطبيعية للآتى (ا) السرعة (ب) العجلة لجسيم فى الأحداثيات الكروية .

١٥٤ – ليكن A^r و B^r متجهين فى الفراغ الثلاثى الأبعاد . بين أنه إذا كان λ و μ ثوابت ، إذن $C^r = \lambda A^r + \mu B^r$ يكون متجها فى مستوى كل من B^r و A^r . ما هو التفسير فى فراغ ذو أبعاد أكثر ؟

١٥٥ – بين أن متجها عموديا على السطح $\phi(x^1, x^2, x^3) = \text{constant}$ يعطى بالعلاقة $A^p = g^{pq}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}$ أوجد وحدة العمود المناظر .

١٥٦ – معادلة الأستمرار تعطى بالعلاقة $\nabla\cdot(\sigma v) + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$. حيث σ تكون الكثافة و V سرعة المائع . عبر عن المعادلة فى صيغة كية ممتدة .

١٥٧ – عبر عن معادلة الاستمرار فى الأحداثيات (ا) الأسطوانية (ب) الكروية .

١٥٨ – عبر عن نظرية ستوكس فى صيغة كية ممتدة .

١٥٩ – أثبت أن انحناء الكمية الممتدة المتحدة الأختلاف R_{pqrs} تكون تماثلا متخالفا فى (ا) p و q (ب) r و s (ج) q و s

١٦٠ – أثبت $R_{pqrs} = R_{rspq}$

١٦١ – أثبت (١) $R_{pqrs} + R_{psqr} + R_{prsq} = 0$

(ب) $R_{pqrs} + R_{rqps} + R_{rspq} + R_{psrq} = 0$

١٦٢ – أثبت أن تفاضل الكمية المتحدة الاختلاف فى فراغ اقليدس يكون تبادليا . لذلك بين أن كمية ريمان – كريستوفل المتدة وانحناء الكمية الممتدة تكون صفرا فى فراغ اقليدس .

١٦٣ – ليكن $T^p = \dfrac{dx^p}{ds}$ متجه المماس للمنحنى C الذى معادلته $x^p = x^p(s)$ حيث s تكون طول القوس .

(١) بين أن $g_{pq}T^pT^q = 1$ (ب) أثبت أن $g_{pq}T^p\dfrac{\delta T^q}{\delta s} = 0$ وكذلك بين أن $N^q = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\delta T^q}{\delta s}$ تكون وحدة العمود على المنحنى C لقيمة مناسبة لـ κ (جـ) أثبت أن $\dfrac{\delta N^q}{\delta s}$ عموديا على N^q

١٦٤ – باستخدام رموز المسألة السابقة ، أثبت :

(١) $g_{pq}T^pN^q = 0$ (ب) $g_{pq}T^p\dfrac{\delta N^q}{\delta s} = -\kappa$ or $g_{pq}T^p(\dfrac{\delta N^q}{\delta s} + \kappa T^q) = 0$

ثم بين أن $B^r = \dfrac{1}{\tau}(\dfrac{\delta N^r}{\delta s} + \kappa T^r)$ تكون وحـدة متجه لقيمة مناسبة لـ τ عموديا على كل من T^p و N^q

١٦٥ – أثبت صيغة فرنت – سيرت

$$\frac{\delta T^p}{\delta s} = \kappa N^p, \quad \frac{\delta N^p}{\delta s} = \tau B^p - \kappa T^p, \quad \frac{\delta B^p}{\delta s} = -\tau N^p$$

حيث T^p و N^p و B^p تكون وحدة المماس ، وحدة العمود ووحدة المتجهات ثنائية التعامد على C و κ و τ الانحناء والالتواء للمنحنى C .

١٦٦ – بين أن $ds^2 = c^2(dx^4)^2 - dx^k dx^k$ $(N=3)$ يكون ثابتا تحت التحول الخطى (المألوف) .

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - vx^4), \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \quad \bar{x}^4 = \gamma(x^4 - \frac{\beta}{c}x^1)$$

حيث γ ، β ، c و v تكون ثوابت ، $\beta = v/c$ and $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ هذا هو تحول لورنتز للنسبية الخاصة . فيزيائيا فإن مشاهد عند أصل النظام x^i يرى حدثا يقع عند الموضع x^1, x^2, x^3 عند زمن x^4 بينما مشاهد عند أصل نظام $\bar{x}^i$ يرى نفس الحدث يقع عند الموضع $\bar{x}^1$ و $\bar{x}^2$ و $\bar{x}^3$ عند الزمن $\bar{x}^4$ بفرض أن (١) النظامين لهم الأحداثيين $\bar{x}^1$ و x^1 منطبقان (٢) الإحداثيين الموجبين $\bar{x}^2$ و $\bar{x}^3$. (٣) النظام $\bar{x}^i$ يتحرك بسرعة v بالنسبة للنظام x^i و (٤) سرعة الضوء C تكون ثابتا .

١٦٧ – بين أنه لمشاهد مثبت فى النظام x^i $(\bar{x}^i)$ ، قضيب مثبت فى النظام $\bar{x}^i$ (x^i) يرقد موازيا للاحداثى $x^1(\bar{x}^1)$ وله الطول L فى هذا النظام يظهر أن له طولا أقصر $L\sqrt{1-\beta^2}$ هذه الظاهرة تسمى انكماش لورنتز – فيتجرالت

الاجابة على المسائل المتنوعة :

٧٧ – (أ) $a_k x^k x^3$ (ب) $A^{2j}B_j$ (جـ) $A^j_k B^k$ (د) $g^{2q}g_{q1}, N=4$ (هـ) $B^{p2r}_{pr}, N=2$

٧٨ – (أ) $\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\,A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\,A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\,A^3)$

(ب) $A^{11}B^p_1 C_1 + A^{21}B^p_1 C_2 + A^{12}B^p_2 C_1 + A^{22}B^p_2 C_2$

(جـ) $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^m} + \dots + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^N}\frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^m}$

٧٩ – قطع ناقص لقيمة $N = 2$ ، ومجسم القطع الناقص لقيمة $N = 3$ ، ومجسم القطع الناقص الفوق لقيمة $N = 4$

٨٠ – $\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 = b_2 \end{cases}$

٨١ – (أ) $\bar{A}^{pq}_r = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A^{ij}_k$ (جـ) $\bar{C}_{pq} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^q}C_{mn}$

(ب) $\bar{B}^{pqr}_s = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s}B^{ijk}_m$ (د) $\bar{A}_p = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}A_m$

٨٢ – (أ) $B(j,k,m)$ كية ممتدة من المرتبة الثالثة وتكون متحدة الاختلاف من المرتبه الثانيه ومتضادة الأختلاف من المرتبه واحد . يمكن أن تكتب B^m_{jk} (ب) $C(j,k,m,n)$ ليست كيه ممتدة .

٨٣ – $4^5 = 1024$

٨٧ – (أ) $2\rho\cos^2\phi - z\cos\phi + \rho^3\sin^2\phi\cos^2\phi$
$-2\rho^2\sin\phi\cos\phi + \rho z\sin\phi + \rho^4\sin\phi\cos^3\phi$
$\rho z\sin\phi.$

(ب) $2r\sin^2\theta\cos^2\phi - r\sin\theta\cos\theta\cos\phi + r^3\sin^4\theta\sin^2\phi\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi$
$2r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi - r^2\cos^2\theta\cos\phi + r^4\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\phi\cos^2\phi$
$- r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi.$
$-2r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi + r^4\sin^4\theta\sin\phi\cos^3\phi$

٨٨ – $u^2 + uv - v^2,\ 3u - uv^2z,\ u^2vz + 3v$ ٨٩ – (أ) B^{rs}_q (ب) A^{pr} (جـ) δ^p_s (د) 1

٩٤ – ليست كيه ممتدة ٩٥ – مرتبه ٣ ومرتبه ١ على الترتيب

٩٨ – نعم .

١٠٠ – (أ) 10 (ب) 21 (جـ) $N(N+1)/2$ ١٠١ – $N(N-1)(N-2)/6$

١٠٧- (أ) $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

(ب) $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -9 & -7 & 10 \\ 9 & 9 & -16 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 8 & -16 & 11 \\ -2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$

١٠٨- (أ) $\begin{pmatrix} -52 & -86 \\ 104 & 76 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -4 & 17 & -2 \end{pmatrix}$ ١١٠ $\begin{pmatrix} 3 & -16 & 20 \\ 9 & 163 & -136 \\ -61 & -135 & 132 \end{pmatrix}$

-١١٠

١١١- $x = -1, y = 3, z = 2$

١١٢- (أ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ (ب) Yes $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

١١٥- (أ)

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

(جـ)

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

١١٦- $\lambda = 4, -1$

١١٩- (أ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u^2+v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ب)

$$\begin{pmatrix} a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

١٢١ - $g = 6, \quad (g^{jk}) = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

١٢٢ - (١) $A^{pq} = g^{pj} A_j^{\cdot q}$ (ب) $A^{p \cdot r}_{\cdot q} = g^{pj} g^{rl} A_{jql}$ (ج) $A_{pq}^{\cdot\cdot r} = g_{pj} g_{qk} g^{rl} A^{jk}_{\cdot\cdot l}$

١٢٨ - $\frac{A^p}{\sqrt{A^p A_p}}$ or $\frac{A^p}{\sqrt{g_{pq} A^p A^q}}$

١٣٠ - (١) الجميع يساوى الصفر

(ب) $[22,1] = -\rho, \quad [12,2] = [21,2] = \rho.$ All others are zero.

$[22,1] = -r, \quad [33,1] = -r\sin^2\theta, \quad [33,2] = -r^2 \sin\theta \cos\theta$

(ج) $[21,2] = [12,2] = r, \quad [31,3] = [13,3] = r\sin^2\theta$

$[32,3] = [23,3] = r^2 \sin\theta \cos\theta.$ All others are zero.

١٣١ - (١)

$[11,1] = u, \quad [22,2] = v, \quad [11,2] = -v, \quad [22,1] = -u,$

$[12,1] = [21,1] = v, \quad [21,2] = [12,2] = u.$

$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{-u}{u^2+v^2}, \quad \left\{ {2 \atop 11} \right\} = \frac{-v}{u^2+v^2},$

$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{u}{u^2+v^2}$ كل الأخرين يكونوا صفرا.

(ب)

$[11,1] = 2a^2 \sinh u \cosh u, \quad [22,2] = 2a^2 \sin v \cos v, \quad [11,2] = -2a^2 \sin v \cos v$

$[22,1] = -2a^2 \sinh u \cosh u, \quad [12,1] = [21,1] = 2a^2 \sin v \cos v, \quad [21,2] = [12,2] = 2a^2 \sinh u \cosh u$

$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{-\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v},$

$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \frac{-\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v},$

$\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}.$ All others are zero.

١٣٢ - (١) $\frac{d^2\rho}{ds^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0$

(ب)
$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r(\frac{d\theta}{ds})^2 - r\sin^2\theta(\frac{d\phi}{ds})^2 = 0$$
$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2 = 0$$
$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$$

١٣٥ – $\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}$ ، $\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}$ ، $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = x^1$ كل الأخر يساوى صفرا

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + x^1(\frac{dx^2}{ds})^2 = 0, \quad \frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \frac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}(\frac{dx^2}{ds})^2 = 0$$

١٣٦ – (أ)
$$A^{jk}_{l,q} = \frac{\partial A^{jk}_l}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{jk}_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}_l + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}_l$$

(ب)
$$A^{jk}_{lm,q} = \frac{\partial A^{jk}_{lm}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{jk}_{sm} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jk}_{ls} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}_{lm} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}_{lm}$$

(جـ)
$$A^{j}_{klm,q} = \frac{\partial A^{j}_{klm}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^{j}_{slm} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{j}_{ksm} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{j}_{kls} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{s}_{klm}$$

(د)
$$A^{jkl}_{m,q} = \frac{\partial A^{jkl}_{m}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jkl}_{s} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{skl}_{m} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{jsl}_{m} + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^{jks}_{m}$$

(هـ)
$$A^{jk}_{lmn,q} = \frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{jk}_{smn} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jk}_{lsn} - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^{jk}_{lms} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}_{lmn} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}_{lmn}$$

١٣٧ – (أ) $g_{jk} A^k_{,q}$ (ب) $A^j_{,q} B_k + A^j B_{k,q}$ (جـ) $\delta^j_k A_{j,q}$

١٤١ – (أ)
$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(ب)
$$\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial}{\partial u}(uv\sqrt{u^2+v^2}\,A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(uv\sqrt{u^2+v^2}\,A_v)\right] + \frac{1}{uv}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

١٤٢ – (أ)
$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

(ب)
$$\frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

حيث e_u و e_v و e_z تكون وحدة المتجهات فى اتجاهات زيادة z و v و u على الترتيب

١٤٣ –
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\Phi = 0$$

١٤٥ – (أ) $\frac{\delta A_k}{\delta t} = A_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{dA_k}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s \frac{dx^q}{dt}$

(ب) $\frac{\delta A^{jk}}{\delta t} = \frac{dA^{jk}}{dt} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}\frac{dx^q}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}\frac{dx^q}{dt}$

(جـ)
$$\frac{\delta}{\delta t}(A_j B^k) = \frac{\delta A_j}{\delta t}B^k + A_j\frac{\delta B^k}{\delta t} = \left(\frac{dA_j}{dt} - \left\{ {s \atop jq} \right\} A_s\frac{dx^q}{dt}\right)B^k + A^j\left(\frac{dB^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} B^s\frac{dx^q}{dt}\right)$$

(د)
$$\frac{\delta}{\delta t}(\Phi A^j_k) = \Phi\frac{\delta A^j_k}{\delta t} + \frac{\delta\Phi}{\delta t}A^j_k = \Phi\left(\frac{dA^j_k}{dt} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k\frac{dx^q}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s\frac{dx^q}{dt}\right) + \frac{d\Phi}{dt}A^j_k$$

١٤٦ – (أ) $g_{jk}\frac{\delta A^k}{\delta t} = g_{jk}\left(\frac{dA^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^s\frac{dx^q}{dt}\right)$

(ب) $\delta^j_k\frac{\delta A_j}{\delta t} = \delta^j_k\left(\frac{dA_j}{dt} - \left\{ {s \atop jq} \right\} A_s\frac{dx^q}{dt}\right) = \frac{dA_k}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s\frac{dx^q}{dt}$

(جـ) $g_{jk}\,\delta^j_r\frac{\delta A^r_p}{\delta t} = g_{rk}\left(\frac{dA^r_p}{dt} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A^r_s\frac{dx^q}{dt} + \left\{ {r \atop qs} \right\} A^s_p\frac{dx^q}{dt}\right)$

١٥٢ – (أ) $\dot r,\ r\dot\theta,\ r\sin\theta\,\dot\phi$

(ب) $\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\phi^2,\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2,\quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot\phi)$

١٥٦ – $\frac{\partial(\sigma v^q)}{\partial x^q} + \frac{\sigma v^q}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^q} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$ حيث v^q تكون مركبات السرعة المتضادة الأختلاف .

١٥٧ – (أ) $\frac{\partial}{\partial\rho}(\sigma v^1) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\sigma v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma v^3) + \frac{\sigma v^1}{\rho} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$

(ب) $\frac{\partial}{\partial r}(\sigma v^1) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma v^2) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\sigma v^3) + \sigma\left(\frac{2v^1}{r} + v^2\cot\theta\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$

حيث v^1, v^2 و v^3

١٥٨ – $\int_C A_p\frac{dx^p}{ds}\,ds = -\iint_S \epsilon^{pqr}A_{q,r}\,\nu_p\,dS$ حيث $\frac{dx^p}{ds}$ تكون وحدة متجه المماس للمنحنى المغلق C و ν_p تكون وحدة العمود الموجب للسطح S الذى له الحدود C

GLOSSARY قائمة المصطلحات

English	العربية
Chapter 1	**الفصل الأول**
Vector	متجـــه
Scalar	عـــددى
Components of a vector	مركبات المتجـــه
Scalar field	مجـــال عددى
Vector field	مجال متجه
System	نظام
Set	فئـــة
Base vector	متجهات الأساس
Commutative law	قانون التبديل
Associative law	قانون الترافق
Distributive law	قانون التوزيع
Rectangular unit vectors	وحدة المتجهات العمودية
Non-colinear vectors	متجهات غير متوازية
Non-coplanar vectors	متجهات ليست فى مستوى واحد
Chapter 2	**الفصل الثانى**
Dot or scalar product	ضرب الكميات العددية
Cross of vector product	ضرب الكميات المتجه
Reciprocal sets of vectors	فئات المتجهات المكسية
Right-handed system	منظومة يمينية
Chapter 3	**الفصل الثالث**
Vector differentiation	تفاضل المتجـــه
Space curves	منحنيات الفراغ
Continuity	الاستمرار
Differentiability	التفاضلية (القابلية للتفاضل)
Partial derivatives of vectors	التفاضل الجزئى للمتجهات
Differential geometry	التفاضلات الهندسية
Binormal	ثنائى العامد
Order	رتبـــة
Centripetal acceleration	العجلة الجاذبة المركزية
Scalar vector	متغير عـددى
Coefficients	معاملات
Factor	العـامل

Operator	العامل المؤثر
Domain	منطقة

Chapter 4 — الفصل الرابع

Gradient	الانحدار
Divergence	التباعد
Curl	الالتفاف
Differentiable scalar functions	دوال عادية قابلة للتفاضل
Dyads	وحدة ثنائية
Invariance	الثبات
Irrotational	لا دوراني
Array	صف

Chapter 5 — الفصل الخامس

Vector Integration	تكامل المتجه
Line Integrals	التكاملات الخطية
Surface Integrals	تكاملات سطحية
Contribution	الاسهام
Arbitrary constant vector	متجه ثابت اختياري
Conic Section	قطع مخروطي
Conservative field	مجال محافظ

Chapter 6 — الفصل السادس

Subscripts	رمز سفلي
Polyhedra	متعدد السطوح
Rigid body	جسم صلب
Current Density	كثافة التيار
Curvature	انحناء
Arc length	طول قوس
Cycloid	دويري
Charge	شحنة
Exact differentials	تفاضل مضبوط
Reciprocal systems	نظم متعاكسة
Simply - connected region	منطقة متصلة بسيطة
Solid angle	زاوية مجسمة

Chapter 7 — الفصل السابع

Differentiable scalar fumctions	دوال عددية قابلة للتفاضل
An affine transformation	تحول متصل (منتسب)

Matrix	مصفوفة
Invariance	الثبات
Gradient	الانحدار
Cylindrical coordinate	الاحداثيات الاسطوانية
Spherical coordinate	الاحداثيات الكروية
Parabolic cylindrical coordinate	الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ
Paraboloidal coordinates	احداثيات جسم قطع مكافئ
Elliptic cylindrical coordinates	الاحداثيات الاسطوانية لقطع ناقص
Oblate spherical coordinates	احداثيات شبه الكرة المفلطحة
Ellipsoidal coordinates	احداثيات جسم القطع الناقص
Bipolar coordinates	الاحداثيات ثنائية القطب
Toroidal coordinate system	نظام الاحداثيات الحلقية
Singular points	نقط فردية
Scale factors	معاملات المقياس
The integrand	التكاملية (التكامل)
Moment of inertia	عزم القصور الذاتى
Reciprocal systems of vectors	نظم اتجاهية متعاكسة
Fundamental quadratic	الصيغة التربيعية الأساسية
Surface curvilinear coordinates	احداثيات منحنى الأضلاع السطحية
Metric coefficients	معاملات مترية
Curve linear coordinates	احداثياتمنحنى الاضلاع
Contravariant components	المركبات المضادة الاختلاف
Covarient components	المركبات المتحدة الاختلاف
Differential of arc length	تفاضل طول القوس

Chapter 8 — الفصل الثامن

Tensor analyses	تحليل الكمية الممتدة
Spaces of N dimensions	الفراغات ذات الأبعاد النونيسة
Coordinates	احداثيات
Exponents	أس
Superscripts	رمز علوى
Coordinate transformations	تحولات الاحداثى
The summation convention	اصطلاح التجميع
Subscript	رمز سفلى
Dummy index	الأسس الدميه
Umbral index	الأسس المظل
Free index	أس حر

Rank	مرتبة
Order	رتبة
Mixed tensors	الكميات المعدة المختلطة
Symmetric and skew	التماثل والتماثل المتخالف
Symmetric tensors	الكمية المعدة
Contraction	الانكماش (التقلص)
Quotient law	قانون خارج القسمة
Matrices	المصفوفات
A null matrix	المصفوفة المنزلة (الصفرية)
Conformable	متوافقة
Transpose	تبديل
Conjugate of reciprocal	ترافق (اقتران) أو معاكس
Tensors	(مقلوب) الكمية المعدة
Geodesics	جيوديسيات (علم المساحة التطبيقية)
Permutation symbols	رموز تبادلية
The intrinsic derivative	المشتقة الذاتية
Independent	مستقلة
The cofactor	المعامل
An extremum	طرف نهاية
Tensor density	كثافة الكمية المعدة

فهرس أبجدى

(ب)

(ت)

(ن)

(هـ)

(و)

VECTOR ANALYSIS
(Schaum)

تعريف بسلسلة شـــــوم :

* لماذا نشتري كتاب شوم ؟

كل كتاب يحتوى على النظرية الأساسية والتعريفات ومئات من المسائل المحلولة بعناية، وكذلك مسائل غير محلولة لمساعدة الطالب على التفوق.

الهندسة

- تكنولوجيا الألكترونيات
- الدوائر الكهربائية
- الماكينات الكهربية
- نظم القوى الكهربية
- النبائط الالكترونية ودوائرها
- أساسيات الهندسة الكهربائية
- الديناميكا الحرارية
- مقاومة المواد
- ميكانيكا الموائع والهيدروليكا
- اهتزازات ميكانيكية

الرياضيات والحاسبات

- الاحتمالات
- الإحصاء
- بحوث العمليات
- التحليل العددى
- تحليل المتجهات
- الجبر الخطى
- التفاضل والتكامل المتقدم
- حساب التفاضل والتكامل
- الدوال المركبة
- الرياضيات الأساسية للحاسب
- الرياضيات المتقدمة
- المعادلات التفاضلية
- الميكانيكا العامة
- نظرية الفئة
- مبادئ حساب التفاضل والتكامل
- البرمجة بلغة الباسكال
- البرمجة بلغة البيسك (عربي)
- البرمجة بلغة البيسك (إنجليزي)
- البرمجة بالفورتران
- البرمجة بلغة الكوبل
- البرمجة بلغة C - الجزء الأول
- البرمجة بلغة C - الجزء الثانى
- أساسيات الفورتران
- أساسيات الكوبول

الكيمياء والفيزياء

- الكيمياء العضوية
- الكيمياء العامة
- فيزياء السنة الأولى الجامعية
- مبادئ الفيزياء

الزراعة والعلوم الحيوية

- الوراثة

الاقتصاد وإدارة الأعمال

- الإحصاء والاقتصاد القياسى
- الاقتصاد الدولي
- النظرية الاقتصادية الكلية
- نظرية اقتصاديات الوحدة
- أصول المحاسبة (1)
- أصول المحاسبة (2)

التربية وعلم النفس

- مقدمة فى علم النفس
- سيكولوجية التعلم

INTERNATIONAL PUBLISHING & DISTRIBUTION HOUSE
P.O. Box 5599 Heliopolis West, Cairo / Egypt
Tel. / Fax: 2990970

